

удк 517.977.58

В. И. Гурман

Модели и методы теории управления

Аннотация. Кратко освещаются направления исследований по теории управления и ее приложениям, проводимые в Исследовательском центре процессов управления ИПС РАН: принцип расширения и основанные на нем приближенные и численные методы; геометрические методы; методы управления колебаниями; приложения разработанных методов. Основное внимание уделяется приложениям к актуальным проблемам устойчивого развития регионов на основе социо-эколого-экономических моделей с учетом инновационного фактора.

Ключевые слова и фразы: принцип расширения, вырожденные задачи, магистральные решения, геометрические методы, управление колебаниями, приближенные методы, устойчивое развитие.

1. Введение

Современная теория управления выросла в обширную область исследований в различных направлениях. Несомненно, развитие этих направлений постоянно стимулируется быстро расширяющимся кругом практических задач, которые обнаруживают все новые и новые особенности, не укладывающиеся в ту или иную теоретическую схему, или уж, во всяком случае, вызывают естественное желание решать их более эффективно. Цель данной статьи — осветить направления, которые развиваются в течение 15 лет в Исследовательском центре процессов управления Института программных систем РАН:

- методы, основанные на принципе расширения;
- геометрические методы;
- управление колебаниями;
- приближенные и численные методы оптимального управления;
- приложения.

Принцип расширения (ПР) состоит в том, чтобы заменить исходную задачу управления со сложными ограничениями, аналогичной задачей, где исключены те или иные связи (и поэтому в каком-то

смысле более простой задачей). Новую задачу нужно сформулировать так, чтобы ее решение удовлетворяло отброшенным связям и совпадало с решением исходной задачи [2].

Этот принцип неявно применялся издавна в теории экстремальных задач и нашел выражение в известном методе множителей Лагранжа и его современных модификациях. Однако, с начала 60-х годов прошлого века он получает новое развитие в работах В. Ф. Кротова по достаточным условиям оптимальности и в серии работ его последователей, к числу которых принадлежит и автор. В них предложен ряд новых нетрадиционных методов, в корне отличных от метода вариаций, который преобладает в вариационном исчислении и теории оптимального управления. Они оказались весьма эффективными для приложений, что подтверждается рядом точных и приближенных методов и значительным числом решений сложных прикладных задач из различных областей [1]. Не случайно он служит хорошей основой для новых приближенных методов и процедур.

Задачи управления (в частности, управляемости и оптимального управления) служат объектами плодотворного приложения геометрических методов, в которых управляемая система трактуется как семейство векторных полей, иначе — динамических систем. Многие важные свойства систем сохраняются при гладких заменах переменных в пространстве состояний. Допустимые траектории и множества достижимости управляемой системы теснейшим образом связаны с группой преобразований, порожденной динамическими системами, из которых состоит изучаемая управляемая. В свою очередь, группы преобразований — это сердцевина геометрии, и их наличие служит основанием для применения геометрических методов и бескоординатного геометрического языка в теории управления [14].

Исследованию задач управления упругими колебаниями посвящено большое число работ (см., например, [16]). Однако в них не дается исчерпывающего решения задач управления упругими колебаниями с помощью граничных управлений при различных типах граничных условий. В проводимых исследованиях эти вопросы рассматриваются с достаточной полнотой для колебаний, описываемых одномерным волновым уравнением с линейными граничными условиями первого, второго и третьего рода, а также смешанных краевых условий, т. е. когда на границе заданы краевые условия разных родов.

Указанные подходы и методы и их приложения кратко описываются в следующих разделах.

2. Принцип расширения и вырожденные задачи

Результаты исследований, относящихся к ПР и его приложениям представлены в монографиях ([2], где дается наиболее общая трактовка ПР, охватывающая разнообразные задачи управления, не только оптимального. Среди них следует отметить как фундаментальный результат — релаксационные расширения управляемых систем с неограниченными управлениями — их преобразования к системам меньшего порядка с сохранением интегральных характеристик, например, экстремумы функционалов, заданных на границе, множества управляемости и достижимости, и т. п.

В ходе исследований на основе ПР наибольшее (и вполне заслуженное) внимание уделяется распространенному на практике и интересному в теоретическом отношении классу задач оптимального управления, объединенных общим термином «вырожденные задачи» [5, 6]. Их характерная особенность — присутствие в системе основных связей — дифференциальных уравнений или дискретных цепочек — скрытых пассивных связей, исключение которых не меняет искомого решения. Развивается общий подход, тесно связанный с релаксационными расширениями, состоящий в замене вырожденной задачи за счет исключения пассивных связей, некоторой регулярной задачей, решение которой либо совпадает с решением исходной задачи, либо содержит все необходимые элементы для последующего простого построения искомого решения. При этом происходит не только регуляризация, но и упрощение задачи, т. е. особенность ее не только устраняется, но даже «утилизируется», а для исследования задачи в целом становится возможным привлечь имеющийся арсенал общих методов оптимального управления.

Особенно эффективен такой подход, когда пассивная связь выявляется и исключается на всем рассматриваемом временном отрезке. В таких случаях исходная задача сводится полностью к задаче меньшего порядка, называемой *производной* задачей. Понижение порядка означает, что решение производной задачи не может регулярным образом удовлетворять в общем случае всем граничным условиям исходной задачи, так что их выполнение происходит скачками во времени, реализуемыми практически большими управляющими воздействиями. Подобные решения называются *магистральными* [7].

Если исходная постановка сама по себе не влечет магистрального решения, но может быть заменена приближенно другой, с магистральным решением, то последнее может быть использовано как эффективное начальное приближение в том или ином итерационном методе поиска решения. Таких методов в настоящее время разработано достаточно много, но они ведут к искомому решению гарантированно лишь при наличии априори хорошего начального приближения, для поиска которого, как правило, никаких рецептов не предлагается. К этому мы еще вернемся в разделах, посвященных приближенным методам и прикладным задачам.

3. Геометрические методы

Результаты, относящиеся к геометрическим методам, отражены в работах [8–11, 14, 15].

В частности, изучены условия управляемости для билинейных систем вида

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i B_i x, \quad x \in R^n, \quad u_i \in R,$$

Для случая $n = 3$ получены необходимые условия и достаточные условия полной управляемости. Для систем, не покрываемых этими условиями, построен алгоритм исследования, дающий решение задачи полной управляемости [8], а для больших размерностей получены условия полной управляемости в положительном ортанте [9].

Эти результаты имеют важное значение для изучения предельных систем, возникающих в ходе релаксационных расширений, упомянутых в предыдущем разделе, и конкретизации на этой основе условий основной теоремы о таких расширениях.

При изучении полной управляемости билинейных систем (1) естественно возникают системы вида

$$(2) \quad \dot{X} = AX + \sum_{i=1}^m u_i B_i X, \quad u_i \in R,$$

где X — матрица (или, более общо, элемент некоторой группы Ли). Получен критерий полной управляемости системы (2) в случае, когда траектории полей $B_i X$ замечают гиперповерхность в пространстве состояний [10].

Для систем (2) со скалярным управлением ($m = 1$) получен ряд условий управляемости для случая, когда пространство состояний есть разрешимая группа Ли [11].

Перечисленные результаты наряду с другими аспектами геометрической теории управления изложены систематически в книгах [14, 15], в доступной форме, что делает эти книги, по-существу, достаточно редкими учебными пособиями по теории управления.

4. Управление колебаниями

Исследовались задачи управления упругими колебаниями с помощью граничных управлений при различных типах граничных условий как краевые задачи для волнового уравнения при ограниченном времени. В итоге полностью решена задача граничного управления упругими колебаниями в классе обобщенных решений из L_2 для различных типов краевых задач (с краевыми условиями первого, второго, третьего родов и со смешанными краевыми условиями). Определены необходимые условия существования решений указанных краевых задач. В явном виде получены обобщенные решения класса L_2 . В явном аналитическом виде найдены управляющие функции, решающие задачу граничного управления колебаниями.

Исследована управляемость линейных гиперболических и параболических систем. Решен ряд задач управляемости колебаниями струны в пространстве L_2 при управлении в краевых управлениях различного типа. Получены аналитические выражения для управлений, переводящих струну в заданное состояние, в т. ч. оптимальных по быстродействию. Эти результаты представлены в [17, 19, 20, 22] и систематически изложены в [21].

Также исследовалась нетрадиционная задача оптимального управления линейной колебательной системой произвольного порядка при неограниченном времени и ограниченном ресурсе управления как нормы программы управления в L_1 [23], которая в целом оказывается нелинейной вырожденной задачей, имеющей в качестве решения импульсный или циклический скользящий режим. Предложен общий подход к ее решению, состоящий из следующих этапов:

- (1) исходная система преобразуется по известной в теории колебаний схеме к разделенной, содержащей n независимых колебательных подсистем второго порядка;

- (2) производится замена переменной времени как аргумента новым аргументом — ресурсом управления (неубывающей функции времени); в результате получается система с неограниченным управлением;
- (3) делается переход к производной системе и соответственно к производной задаче ([3], с. 50), в которых переменными состояния служат n амплитуд и $n - 1$ разностей фаз подсистем, а управлениями — направление исходного управляющего вектора и время;
- (4) исследуются общие необходимые и достаточные условия оптимальности для производной задачи; обнаруживается важное свойство искомых оптимальных режимов: кусочное постоянство в исходном пространстве положений, которое в исходных терминах может быть реализовано посредством импульсов управления или циклических скользящих режимов.

В качестве важного частного случая полностью решена задача гашения колебаний.

5. Приближенные и численные методы

Исследования и разработки в области приближенных и численных методов ориентированы главным образом на задачи дискретного управления.

Дискретные динамические модели управляемых систем являются весьма важным в теоретическом и практическом отношении классом математических моделей, позволяющим охватить очень широкий круг реальных объектов и соответствующих им задач управления. Они возникают как вполне естественные при моделировании дискретных процессов, таких как задачи распределения ресурсов, обработка и передача информации цифровыми электронными устройствами, либо опосредованно — при дискретизации непрерывных моделей для практических расчетов или с целью учета неоднородности их поведения, либо чисто искусственным путем при организации различных итерационных вычислительных процедур.

Для этого класса моделей разработаны новые итерационные методы первого и второго порядков поиска и локально-оптимального синтеза управления, основанные на достаточных условиях локальной оптимальности и на локализации описания множеств достижимости с широкими возможностями адаптации к условиям применения.

В частности, разработан адаптивный алгоритм поиска оптимального управления дискретной системой с новым типом регулятора в виде временного интервала [26, 29]. За счет последнего достигается большая гибкость в настройке на решаемую задачу. Доказано свойство релаксационности алгоритма и предложен ряд его модификаций. Реализован соответствующий программный комплекс, предназначенный для исследовательских и учебных целей.

Предложен итерационный алгоритм улучшения и оптимизации дискретного управления [33], основанный на локализации глобальной схемы решения задачи оптимального управления в стандартной форме как задачи о минимуме функции конечного состояния, задающей минимизируемый функционал, на множестве достижимости управляемой системы. При этом используется новый оригинальный подход к описанию и аппроксимации множества достижимости [30].

Разрабатываются новые методы приближенного синтеза оптимального управления на основе полиномиальной аппроксимации решения известного уравнения Беллмана и траекторного восстановления функции цены, которая становится функцией Беллмана, если траектории оптимальны [32, 34, 37]. Их эффективность подтверждается приложениями к практическим задачам, в частности к задаче оптимизации пространственного маневра вертолета и задаче об оптимальной стратегии устойчивого развития [31]. Метод восстановления функции цены особенно эффективен в задачах с магистральными решениями, что хорошо демонстрирует приложение данного метода к актуальной задаче оптимизации стратегии устойчивого развития на агрегированной эколого-экономической модели — типичной задаче с магистральным решением. Специфика этой задачи позволяет построить глобальный приближенный синтез оптимального управления с хорошей априорной оценкой, позволяющей судить о высокой точности решения. Выясняется также возможность приложений к аналогичным задачам любой размерности, что невозможно в рамках классической схемы Беллмана из-за «проклятия размерности».

Вырожденность задач оптимального управления и связанных с ней магистральный тип решений, характерные для приложений, могут быть эффективно использованы при построении процедур оптимизации управлений, в особенности на этапе поиска хороших начальных приближений для последующего уточнения регулярными алгоритмами, как правило, итерационными, работающими надежно «вблизи» искомого решения [34].

При этом происходит целенаправленное изменение математической модели исследуемого объекта, так что, по существу, речь идет о продолжении процесса моделирования в ходе решения задачи. Эффект от такого изменения может быть усилен, если при исследовании содержательных задач управления стремиться к математическим постановкам, которые, не порывая с содержанием, имеют явные признаки вырожденности.

Логическим продолжением такого подхода является схема последовательного уточнения модели. Как известно, для одного и того же объекта могут быть построены различные модели в зависимости от цели и методов исследования и таких противоречивых требований, как простота и точность. Множество таких моделей, будучи упорядочено по принципу расширения, позволяет удовлетворить указанным требованиям с помощью процедуры последовательных приближений на нем от более простых, но грубых моделей, к более точным, но сложным. Для задач оптимального управления результатом такой процедуры будет некоторая последовательность верхних (нижних) границ заданного функционала, приближающихся к точному максимуму (минимуму) [33, 36].

Эффективность этой схемы нашла свое подтверждение при исследовании оптимальных маневров вертолета [35], которое вызывает серьезные трудности из-за большой сложности сравнительно полной модели его динамики полета. Она традиционно включает как минимум 14 нелинейных дифференциальных уравнений и разнообразные дополнительные ограничения. Вполне естественно разумное упрощение такой модели на различных стадиях исследования, особенно на стадии проектирования. Если при этом действовать по принципу расширения, то можно получить некоторый упорядоченный набор моделей — от более простых, но грубых, до более точных, но более сложных, позволяющих получить серию приближенно-оптимальных маневров с соответствующими верхними оценками точности.

В качестве начальной грубой модели из всех уравнений было выбрано кинематическое соотношение между положением и скоростью центра масс вертолета в инерциальном пространстве: $\dot{r} = v$. Добавление следующего кинематического соотношения между скоростью и ускорением $\dot{v} = a$ давало следующее приближение. Затем добавлялись уравнения углового движения и динамики ротора и т. д. Наиболее полная и точная модель вертолета использовалась только для

компьютерной имитации при выбранных приближенно оптимальных траекториях полета и проектных параметрах.

Оказалось, что решение в первом приближении и его последующая аппроксимация реальными допустимыми режимами порождает серию приближенно-оптимальных маневров с верхней оценкой точности около 12% в широком диапазоне начальных условий. Это вполне приемлемо, в особенности, на этапе проектирования, когда не требуется высокой точности вычислений, зато важно, чтобы соответствующие алгоритмы были достаточно простыми для обеспечения многовариантности расчетов.

Такой подход представляется особенно актуальным для разрабатываемой в настоящее время концепции многометодной интеллектуальной процедуры поиска оптимального управления [24, 25, 27, 28], призванной сделать доступным прикладным пользователям, без чрезмерных требований к их математической подготовке, богатый арсенал математических методов, накопленных в теории оптимизации и управления. В этой концепции наиболее сложен и наименее разработан начальный этап поиска; на его формализацию как раз и ориентированы магистральные решения и последовательное уточнение модели.

В развитие данного направления разработана опытная версия ИСОУ (Интеллектуальной Системы Оптимизации Управления) с соответствующим программным комплексом и методическим пособием, позволяющая составлять и использовать многометодные процедуры поиска оптимального управления. Создан Web-ресурс, посвященный проекту и содержащий описание системы интеллектуальной многометодной системы, управляющих операторов, алгоритмов и тестовых задач (<http://www.botik.ru/~\protect\kern+.1667em\relaxcprc/ISOU/>).

6. Приложения

Практические приложения для теории управления, как и любой другой теории, всегда служили богатой питательной средой для развития новых методов и подходов. Тем более это верно для методов, основанных на применении ПР, как он трактуется здесь, поскольку любой его вариант несет в себе творческий элемент — «конструирование» разрешающего расширения, которое, как правило, неединственно. Такое «конструирование» применительно к той или иной практической задаче с учетом ее специфики естественным путем приводит

к методу той или иной общности для целого класса задач. Не случайно, что прикладные задачи занимают важное место в исследованиях рассматриваемого направления. Разработанные на основе ПР методы применимы и эффективно применялись для решения многих содержательных задач и даже целых классов задач из различных областей — механики полета, физики, промышленных технологий, математической экономики и экологии [1,2] (две из них — об оптимальных маневрах вертолета и оптимальном гашении колебаний многозвенной системы рассмотрены выше).

Многие прикладные задачи оптимального управления оказываются вырожденными, имеющими магистральные решения. С более общих позиций можно говорить о магистральной природе решений любых таких задач. Дело в том, что при математической постановке таких задач, непосредственно связанной с моделированием реальных объектов, закладывается стандартное предположение о безынерционности переменных, олицетворяющих в модели управляющие воздействия, иначе — о возможности их мгновенного переключения с одного значения на любое другое в процессе управления. Но в реальности оно выполняется лишь приближенно, поскольку любое физическое изменение происходит в результате некоторого процесса во времени, который мог бы быть описан дифференциальной связью. При моделировании она как бы игнорируется, и таким образом поставленная задача оказывается производной (в нашей терминологии) по отношению к задаче, в которой эта связь бы учитывалась.

Успешным решением большинства из рассмотренных задач мы обязаны как раз их вырожденности. Таким образом, то самое «зло» каким грозит вырожденность при применении общих методов, заставляя прибегать к громоздкой приближенной регуляризации задач, оборачивается большим «благом» для специальных методов, опирающихся на вырожденность. Это «благо» состоит в возможности исключения имеющихся пассивных связей, что ведет к понижению порядка системы связей, т. е. к упрощению задачи. Чем «сильнее» вырождена задача, тем существеннее понижение порядка.

В этом отношении весьма характерным является класс задач управления на моделях экономических, эколого-экономических или социо-эколого-экономических систем, связанных с решением актуальных проблем устойчивого развития. Их особенность — высокая степень открытости, отражаемая, в частности, большим количеством

линейных управляющих воздействий, таких как инвестиции, очистка промстоков, лесопосадки, инновации, обучение, здравоохранение и т. п. Именно этот класс задач на протяжении ряда лет был и остается основным объектом приложений разрабатываемых методов. С целью создания информационно-компьютерного инструментария для поддержки стратегических управленческих решений, отвечающих современной парадигме устойчивого развития, на уровне региона — будь то страна, область или муниципальный округ. Устойчивое развитие регионов предполагает достижение их экономического роста вместе с сохранением (или восстановлением) экологического и социального равновесия.

Основу описанных разработок составляют достаточно развитая социо-эколого-экономическая модель региона, методики ее информационного наполнения, процедуры поиска оптимальных решений и сценарного анализа. Указанная модель представляет собой результат эволюционного развития. Изначальная ее концепция как модели экономического роста переросла в эколого-экономическую [38], затем в социо-эколого-экономическую [39], а в последнее время пополнилась новым блоком, отражающим активные инновационные процессы как важнейший фактор устойчивого развития [44].

В работе [46] предложена сравнительно простая и достаточно обшая схема формализации инновационного фактора, состоящая в том, чтобы строить модель через видоизменение созданной ранее. При этом под инновациями понимается любое изменение в благоприятную сторону параметров исходной модели, которые ранее считались постоянными.

Разработанный инструментарий был апробирован применительно к региону Переславля и к Сумской обл. на Украине. Для этих регионов была проведена серия модельных компьютерных экспериментов по нескольким сравнительным сценариям, включая инновационные, в которых существенные доли располагаемых инвестиций направлялись в инновационный сектор [45].

Неотъемлемой частью проведенного сценарного анализа была оптимизация стратегий устойчивого развития, организованная как многоэтапная многометодная процедура, в которой модель региона модифицировалась поэтапно от существенно идеализированной с абсолютно магистральным решением в аналитическом виде до наиболее реалистической, учитывающей всевозможные детали и ограничения. Последняя использовалась лишь на заключительном этапе вместе с

итерационным методом улучшений управлений и хорошим приближением оптимального режима, полученным на предшествующих этапах. В результате для задачи 20-го порядка со сложным набором данных была эффективно проведена серия многовариантных расчетов оптимальных стратегий развития для различных сценариев, отражающих реальные неопределенности внешних условий. Возможность решения такой задачи по традиционной схеме каким-либо одним методом представляется по крайней мере проблематичной.

Результаты в обоих случаях оказались весьма показательными. В оптимальных стратегиях без инноваций большинство отраслей оказались неэффективными (по критерию устойчивого развития) и сворачивались до минимально допустимых (по условиям занятости) объемов выпуска продукции. В инновационных сценариях при существенной доле располагаемых инвестиций в инновационном секторе в начале рассматриваемого 15-летнего периода интенсивно изменялись параметры, входящие в критерий устойчивого развития, после чего большая часть ресурсов переводилась в экономику; все отрасли через 5–8 лет становились эффективными и переключались на максимальные объемы выпусков. Это вполне согласуется с положением о важнейшей роли инновационного фактора в определении стратегий устойчивого развития.

В настоящее время эти исследования сосредоточены на моделировании и содержательном анализе инновационных процессов в регионе. В частности, проводится их углубленный общетеоретический анализ на агрегированных моделях различной сложности с целью повышения эффективности будущих многовариантных сценарных расчетов стратегий устойчивого развития [40–44, 48].

Список литературы

- [1] Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. ↑1, 6
- [2] Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. — М.: Наука. Физматлит, 1997. ↑1, 2, 6
- [3] Gurman V.I. The extension principle in control problems. General theory and learning examples. — Moscow: Nauka.Fizmatlit, 1998. ↑3

- [4] Гурман В. И. *Принцип расширения в абстрактной теории систем и управления* // Программные системы: Теоретические основы и приложения ред. А. К. Айламазян. — М.: Наука. Физматлит, 1999. ↑
- [5] Гурман В. И. *Вырожденность, расширения и обобщенные решения задач оптимального управления* // Труды XII Байкальской международной конференции «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, июнь 2001. Т. 1 Пленарные доклады. — Иркутск: Издательство Иркутского государственного университета, 2001, с. 104–112. ↑2
- [6] Гурман В. И. *Особые и обобщенные оптимальные управления* // Труды Математического ин-та НАН Белоруссии, № 7. — Минск, 2001, с. 31–37. ↑2
- [7] Гурман В. И. *Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений* // Автоматика и телемеханика, № 11. ↑2
- [8] Сачков Ю. Л. *Управляемость трехмерных билинейных систем* // Вестник Московского Университета, Сер. Мат. Мех., № 3, 1991, с. 26–30. ↑3, 3
- [9] Sachkov Yu. L. *On Positive Orthant Controllability of Bilinear Systems in Small Codimensions* // SIAM Journ. Control and Optimization. — Т. 35, № 1, 1997, с. 29–35. ↑3
- [10] Sachkov Yu. L. *Controllability of Hypersurface and Solvable Invariant Systems* // Journal of Dynamical and Control Systems. — Т. 2, № 1, 1996, с. 55–67. ↑3
- [11] Sachkov Yu. L. *Controllability of Right-Invariant Systems on Solvable Lie Groups* // Journal of Dynamical and Control Systems. — Т. 3, № 4, 1997, с. 531–564. ↑3, 3
- [12] Sachkov Yu. L. *On Invariant Orthants of Bilinear Systems* // Journal of Dynamical and Control Systems. — Т. 4, № 1, 1997, с. 137–147. ↑
- [13] Сачков Ю. Л. *Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны* // Матем. сборник. — Т. 194, № 9, 2003, с. 63–90. ↑
- [14] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления*. — Москва: Физико-математическая литература, 2004, В печати. ↑1, 3, 3
- [15] Agrachev A. A., Sachkov Yu. L. *Control theory from the geometric viewpoint*. — Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer-Verlag, 2004, В печати. ↑3, 3
- [16] Егоров А. И., Знаменская Л. Н. *Управление упругими колебаниями (обзор)* // Оптимизация, Управление, Интеллект (Труды международной конференции CDS'2000) Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск 2000. — Иркутск: Издательство Иркутского государственного университета, 2001, с. 104–112. ↑1
- [17] Ильин В. А. *Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией* // Дифференциальные уравнения. — Т. 36, № 11, 2000, с. 1513–1528. ↑4
- [18] Ильин В. А. *Краевые управления процессом колебаний* // Программные системы: Теоретические основы и приложения. — М.: Наука, Физматлит, 1999. ↑
- [19] Знаменская Л. Н. *Априорные оценки обобщенных решений волнового уравнения* // Дифференциальные уравнения. — 37, № 8, с. 1062–1070. ↑4
- [20] Знаменская Л. Н. *Управление колебаниями струны в классе обобщенных решений из L_2* // Дифференциальные уравнения. — 38, № 5, с. 666–672. ↑4

- [21] Знаменская Л. Н. Управление упругими колебаниями. — М.: Наука. Физматлит, 2004, с. 176. ↑4
- [22] Знаменская Л. Н. *Управляемость колебаниями струны на двух концах при ограничениях на нормы управлений* // Математика, информатика: теория и практика. Сборник трудов, посвященный 10-летию Университета города Переславля. — Переславль-Залесский: Издательство «Университет города Переславля», 2003, с. 136–143. ↑4
- [23] Гурман В. И., Знаменская Л. Н. *Управление колебаниями при ограниченном ресурсе управления* // Известия РАН. Серия «Теория и системы управления», № 1, 2001, с. 41–49. ↑4
- [24] Belyshev D., Gurman V. *Software architecture for the investigation of controllable models with complex data sets* // The Architecture of Scientific Software. — R.F. Boisvert and P.T.P. Tang, eds. — Ottawa, Canada: Kluwer Academic Publishers, 2001, с. 317–332. ↑5
- [25] Бельшев Д. В., Гурман В. И. *Интеллектуальные процедуры оптимального управления* // Автоматика и Телемеханика. — 5, с. 147–155. ↑5
- [26] Бельшев Д. В., Саблин М. Ю. *Алгоритм второго порядка поиска оптимального управления дискретной системой* // Математика, информатика: теория и практика. Сборник трудов, посвященный 10-летию Университета города Переславля. — Под редакцией А. К. Айламазяна. — Переславль-Залесский: Издательство: «Университет города Переславля», 2003, с. 125–129. ↑5
- [27] Бельшев Д. В., Гурман В. И. *Многометодный подход к оптимизации управления* // Математика, информатика: теория и практика. Сборник трудов, посвященный 10-летию Университета города Переславля. — Под редакцией А. К. Айламазяна. — Переславль-Залесский: Издательство: «Университет города Переславля», 2003, с. 130–135. ↑5
- [28] Бельшев Д. В., Гурман В. И. *Программный комплекс многометодных интеллектуальных процедур оптимального управления* // Автоматика и телемеханика. — 6, с. 60–67. ↑5
- [29] Бельшев Д. В. *Алгоритм поиска оптимального управления дискретной системой* // Автоматика и телемеханика, В печати. ↑5
- [30] The extension principle in control problems. Constructive methods and applied problems. — Moscow: Fizmatlit, 2004, В печати. ↑5
- [31] Ухин М. Ю., Шевчук Е. В. *Оптимальная стратегия устойчивого развития*. — М.: РосЗИТЛП, 1999, с. 86–99. ↑5
- [32] Никифорова Л. Н., Ухин М. Ю. *Приближенный синтез дискретного оптимального управления*. — М.: Наука, Физматлит, 2004. ↑5
- [33] Гурман В. И., Ухин М. Ю. *Метод улучшения дискретного управления, основанный на аппроксимации множества достижимости* // Сборник научных трудов, посвященный 20-летию ИПС. ↑5
- [34] Гурман В. И., Ухин М. Ю. *Приближенный синтез оптимального управления в задачах с магистральными решениями* // Автоматика и телемеханика, В печати. ↑5

- [35] Gurman V., Nikiforova L. *Extension principle in modeling and optimal control: case study for helicopter maneuvering* // A Postprint Volume from the 10th IFAC Workshop, Haifa, Israel, 19-21 December. — London: Elsevier, 1996. ↑**5**
- [36] Gurman V., Uhin M. *Models of control systems for practical optimization and estimation problems* // Proceedings of Fourth International Conference «Tools for Mathematical Modelling» in Honor of 300-Anniversary of Saint-Petersburg (MATHTOOLS'2003). — Saint-Petersburg, 2003. ↑**5**
- [37] Гурман В. И., Ухин М. Ю. *Приближенный синтез оптимального управления в задачах с магистральными решениями* // Труды второй международной конференции по проблемам управления (МКПУ II) 16–20 июня 2003 г. — Москва: Институт проблем управления РАН, 2003. ↑**5**
- [38] Модели управления природными ресурсами / ред. Гурман В. И. — М.: Наука, 1981. ↑**6**
- [39] Гурман В. И., Кульбака Н. Э. *Опыт социо-эколого-экономического моделирования развития региона* // Экономика и мат. методы. — **35**, № 3. ↑**6**
- [40] Гурман В. И., Ухин М. Ю. *Магистральные решения в задачах оптимизации стратегий развития регионов* // Автоматика и телемеханика. — **4**, В печати. ↑**6**
- [41] Гурман В. И., Ухин М. Ю. *Моделирование и оптимизация стратегий устойчивого развития с учетом инноваций* // Proceedings of the Sixth International Conference of the Russian Society for Ecological Economics. Economic Development and the Environment: Information, Modeling and Management (RSEE-2003) August 18-23, 2003 Lake Baikal, Siberia, Russia. — Chita, 2003. ↑
- [42] Лучшева В. В. *Построение модели оценивания эффективности научно-технических нововведений в регионе* // Математика, информатика: теория и практика. Сборник трудов, посвященный 10-летию Университета города Переславля. — Под редакцией А. К. Айламазяна. — Переславль-Залесский: Издательство: «Университет города Переславля», 2003, с. 144–147. ↑
- [43] Лучшева В. В. *Характеристика и экологическое значение инновационных процессов в регионе* // Экономика природопользования, В печати. ↑
- [44] Гурман В. И., Рюмина Е. В. *Моделирование инновационного фактора регионального развития* // Труды XII Байкальской международной конференции «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 24 июня–1 июля 2001 г. Иркутск. — Иркутск, ИДСТУ, 2001: ИДСТУ, 2001. ↑**6**
- [45] Гурман В. И., Рюмина В. И. *Моделирование социо-эколого-экономической системы региона*. — М.: Наука, 175 с., 2001, с. 175, В печати. ↑**6**
- [46] Gurman V. *Modeling and optimization sustainable strategies on regional level* // Proceedings of LI Int. Conference Econometrics of Environment and Transdisciplinarity. Lisbon, Portugal, April 1996. — Т. **5**. — Lisbon, 1996. ↑**6**
- [47] Гурман В. И. *Моделирование устойчивого развития с учетом инновационных процессов* // Экономика и мат. методы. — **37**, № 1. ↑
- [48] Гурман В. И., Рюмина Е. В. *Оценка влияния инноваций на развитие экономики и состояние окружающей среды* // Вестник РГНФ, № 5. ↑**6**

V. I. Gurman. *Models and methods of control theory.* (in russian.)

ABSTRACT. There are described in brief the research directions in control theory and its applications which are developed in the Control processes research center of PSI RAS: the extension principle and based on it approximate and computational methods; geometrical methods; oscillations control methods; applications where main notice is taken of acute regional sustainable development problems on the base of socio-ecology-economic models accounting for innovations.