ISBN 978-5-901795-13-2 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. Переславль-Залесский, 2008

А. А. Ардентов

Множество разреза в задаче Эйлера об эластиках*)

Научный руководитель: доц. Ю. Л. Сачков

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Эйлера о стационарных конфигурациях упругого стержня с фиксированными конечными точками и направлениями стержня на концах. Написана полная версия программы для нахождения оптимального стержня по заданным граничным условиям. Исследовано множество разреза в этой задаче. Построены программы в системе Mathematica для нахождения поверхности разреза.

1. Постановка задачи об эластиках

В классическом вариационном исчислении и оптимальном управлении хорошо известна задача о стационарных профилях упругого стержня. Леонард Эйлер, впервые рассмотревший эту задачу в 1744 г., описал все возможные стационарные профили; они называются эйлеровыми эластиками. Известно, что эластики параметризуются эллиптическими функциями. Однако задача оптимального управления оставалась нерешенной; одной из целей данной работы является ее исследование.

Подробнее, задача состоит в следующем. На плоскости даны точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), и в каждой из точек закреплен некоторый вектор (v_0, v_1 соответственно). Требуется соединить точки гладкой кривой γ, выходящей из (x_0, y_0) с вектором скорости v_0 и попадающей в (x_1, y_1) с вектором скорости v_1 (см. рис. 1). Понятно, что в такой постановке задача имеет очень много различных решений. Наложим на кривую γ условие: потребуем, чтобы вдоль искомой кривой квадрат кривизны имел наименьший интеграл:

$$\int_\gamma k^2 dt \to \min . \qquad (1)$$

*) Представлено по тематике: *Методы оптимизации и теория управления.*

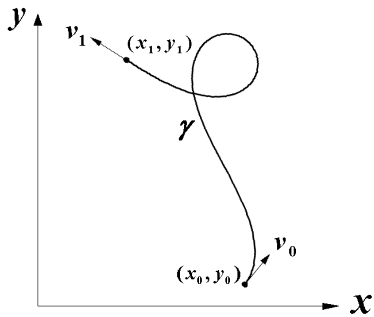

Рис. 1. Постановка задачи

Эта задача имеет простой физический смысл: рассмотрим упругий стержень с закрепленными концами и направлениями стержня в концах (держим стержень руками за концы), функционал имеет смысл упругой энергии. Какую форму примет стержень? Возможные формы, которые может принимать упругий стержень, открыл Эйлер, они называются эйлеровыми эластиками. Однако заданным граничным условиям удовлетворяет не единственная эластика. Вопрос в том, как отобрать эластики, доставляющие решение нашей задаче.

Математически задача об эластиках ставится как следующая задача оптимального управления, см. [1]:

$$\dot{x} = \cos\theta, \tag{2}$$

$$\dot{y} = \sin\theta, \tag{3}$$

$$\dot{\theta} = u, \tag{4}$$

$$q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta, \qquad u \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \qquad q(1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), \tag{6}$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)\, dt \to \min, \tag{7}$$

без ограничения общности предполагаем, что упругий стержень имеет единичную длину.

2. Результаты предыдущих работ и цели этой работы

В работе [2] была построена параметризация эйлеровых эластик с помощью эллиптических функций Якоби.

В работах [3, 4] решение задачи оптимального управления (2)–(7) было сведено к решению систем алгебраических уравнений:

$$q(\chi) = q_1, \quad \chi \in N, \quad q_1 \in M, \tag{8}$$

где трехмерное пространство N — прообраз экспоненциального отображения, а $q(\chi)$ — параметризация эластик при фиксированном t_1. Множества N и M имеют такие разбиения (см. разбиение в прообразе на рис. 2):

$$N = \bigcup_{i=1}^{4} L_i, \quad M = M_+ \cup M_-, \tag{9}$$

что описанная система уравнений (8) однозначно разрешима при следующих сужениях:

$$\chi \in L_1, \quad q \in M_-, \tag{10}$$

$$\chi \in L_3, \quad q \in M_-, \tag{11}$$

$$\chi \in L_2, \quad q \in M_+, \tag{12}$$

$$\chi \in L_4, \quad q \in M_+. \tag{13}$$

Для поиска оптимальной эластики для точки $q_1 \in M_-$ достаточно найти решения χ_1, χ_2 системы (8) с ограничениями (10) и (11) соответственно, вычислить соответствующие им значения функционала $J_1 = J(\chi_1)$, $J_2 = J(\chi_2)$ и выбрать χ_i с минимальным J_i. Соответствующая эластика и будет оптимальной. В случае $q_1 \in M_+$ процедура аналогична, с заменой ограничений (10), (11) на (12), (13).

В работе [5] была написана программа в системе Mathematica [6] для решения системы (8) с ограничением (10) и (11), т. е. для поиска оптимальных эластик по заданным граничным условиям в областях L_1 и L_3.

На основе этих результатов можно определить цели данной работы:

- написать полную версию программы для поиска оптимальных эластик так, чтобы эластики находились во всех областях, то есть определить стратегию для областей L_2 и L_4;
- изучить поверхность, разрезающую области оптимальности подобластей L_1, L_3 и L_2, L_4. Эта поверхность в полнотории M состоит из точек разреза, т. е. точек, в которых экстремальные траектории теряют свою оптимальность([3, 4]).

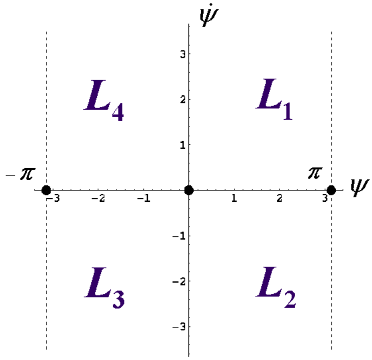

Рис. 2. Разбиение на области в прообразе

Множество разреза является важной характеристикой задачи оптимального управления: на основе ее описания можно построить оптимальный синтез $u = u(q)$. Кроме этого, знание множества разреза важно для других задач оптимального управления, например, для моделирования биологических систем (движение руки человека, перемещение человека при ходьбе).

3. Полная программа поиска эластик

Программа поиска эластик, построенная в работе [5], находила оптимальные эластики только в двух из четырех областей. С помощью полученных ранее результатов была построена программа поиска оптимальных эластик без изменения основных формул. Суть дополнения заключается в следующем:

- добавление нескольких функций перевода координат одной области L_i в другую с использованием симметрий задачи;
- добавлении функции, переводящей границы поиска одной области в границы поиска другой области;
- адаптирование старых функций к новым областям, то есть сохранение функциональности старого кода для новых областей.

Таким образом, схема алгоритма, изображенная на рис. 3, не изменилась, добавилась лишь дополнительная ветка, выполняющаяся аналогично имеющейся.

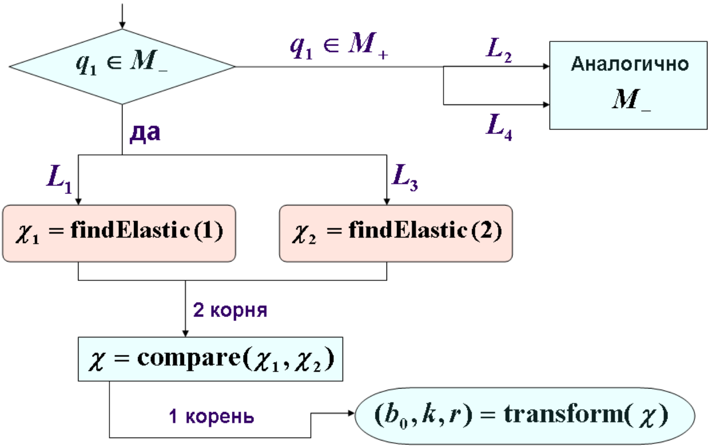

Рис. 3. Схема алгоритма

При изменении старого кода произошла его оптимизация (некоторые функции были упрощены, часть кода стала выполняться быстрее).

4. Фильмы с эластиками

Для исследования поведения эластик вблизи поверхности разреза были созданы фильмы, описывающие непрерывное движение эластики в области допустимых положений при изменении граничных условий. Для этого каждой точке в полнотории M сопоставляются две найденные эластики (либо из L_1 и L_3, либо из L_2 и L_4), после чего сравнивается функционал упругой энергии, оптимальной является та, у которой функционал принимает меньшее значение. Была создана серия фильмов, в которых один конец стержня и угол наклона другого зафиксированы, а место положения второго конца менялось.

Кроме этого, была написана программа, которая по заданной кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ строит фильм, описывающий поведение эластики, при котором второй конец эластики касается кривой (начало стержня неподвижно). В качестве таких кривых были взяты окружность [7] и «восьмерка» [8].

Заметим, что сама функция не генерирует фильм, она выдает лишь серию картинок (см. рис 4), являющихся кадрами искомого

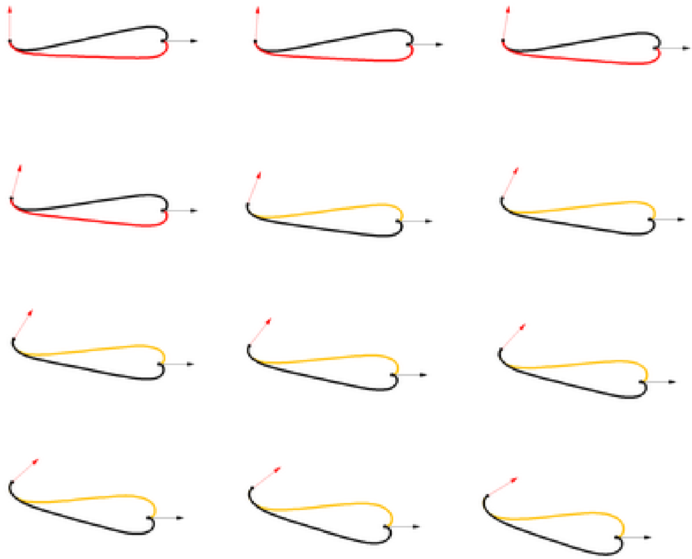

Рис. 4. Кадры фильма

фильма, сам же фильм получается на основе этих картинок с помощью специальной программы.

5. Множество разреза в сечении полнотория

Для того чтобы получить представление о поверхности разреза, с помощью написанной программы некоторые сечения полнотория были раскрашены в цвета, обозначающие одну из четырех областей L_i (использовались красный, синий, желтый и зеленый цвета, см. рис. 5) или поверхность разреза (обозначается черным цветом). Заметим, что множество разреза — точки, для которых обе эластики (кандидаты на оптимальную) имеют одинаковое значение функционала упругой энергии. Цветные точки не так интересны, поэтому было сосредоточено внимание на черных, которые задают искомую

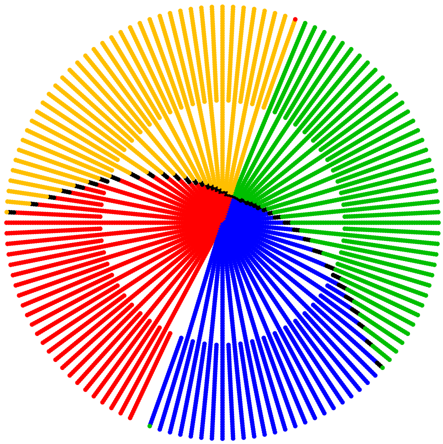

Рис. 5. Раскрашивание сечения полнотория

поверхность разреза (см. рис. 6). Алгоритм был усовершенствован таким образом, что поиск черных точек был заметно быстрее, нежели прямым перебором на луче. Для этого использовался метод хорд с использованием точки, найденной на предыдущей итерации, в качестве начального приближения.

В дальнейшем, будут найдены точки разреза в многих сечениях с некоторым шагом, и на их основе будет сконструирована трехмерная картинка, изображающая множество разреза.

Поверхность разреза интересна потому, что:

- с помощью ее можно сократить время поиска оптимальной эластики вдвое, т. к. при известном множестве разреза можно однозначно определить, в какой из четырех областях необходимо искать корень (сейчас поиск ведется в двух, либо в L_1 и L_3, либо в L_2 и L_4);
- ее структура до сих пор не известна, возможно, информацию о ней можно применить в дальнейшем в других приложениях.

6. Итоги и перспективы

Получены следующие результаты:

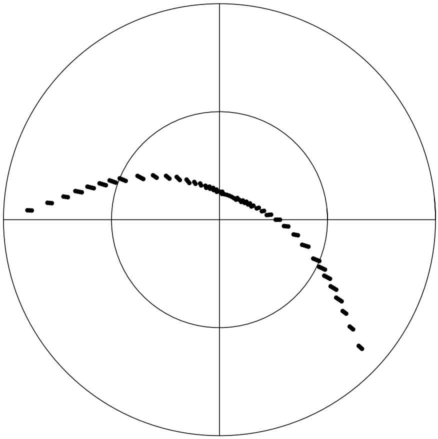

Рис. 6. Поверхность разреза в сечении полнотория

- написана программа в системе Mathematica [6], которая находит оптимальные эластики глобально, во всех четырех областях.
- создана программа, позволяющая создавать фильмы с движением эластики по области допустимых значений, в частности создана также программа, в которой движение эластики задается некоторой кривой;
- создана программа, которая разбивает сечение тора на области, соответствующие L_1, L_2, L_3, L_4, то есть находящая поверхность разреза.

Ближайшей целью является построение трехмерного изображения для множества разреза. Устройство алгоритма естественным образом определяет гранулы параллелизма. В частности, в качестве гранулы параллелизма можно взять одну итерацию поиска оптимальной эластики, либо весь поиск оптимальной эластики, либо поиск оптимальных эластик у группы точек. Таким образом, имеется возможность для распараллеливания, которая будет осуществляться с помощью системы gridMathematica.

Список литературы

[1] Сачков Ю. Л. *Оптимальность эйлеровых эластик* // Доклады Академии Наук, том 417, номер 1, ноябрь 2007, с. 23–25.

[2] Ардентов А. А. *Экстремальные кривые в задаче Эйлера об эластиках* // Международная конференция «Программные системы: теория и приложения» Т. 2, 2006, с. 23–37.

[3] Sachkov Yu. L. *Conjugate points in Euler's elastic problem* // Journal of Dynamical and Control Systems, 2008.

[4] Sachkov Yu. L. *Maxwell strata in Euler's elastic problem* // Journal of Dynamical and Control Systems, 2008.

[5] Маштаков А. П. *Экстремальные кривые в задаче о качении сферы по плоскости* // Материалы XI научной студенческой конференции университета города Переславля им. А.К. Айламазяна. — г. Переславль-Залесский: Издательство УГП, 2007, с. 23–30, Эл. ресурс: `http://wiki.botik.ru/pub/IS4UGP/StudConf/1-1/01-ardentov-p-7.pdf`.

[6] Wolfram S. Mathematica: a system for doing mathematics by computer. — Redwood City, CA, USA: Addison-Wesley, 1991. — 961 с.

[7] `http://www.botik.ru/PSI/CPRC/sachkov/GROUP/full_circle.avi`.

[8] `http://www.botik.ru/PSI/CPRC/sachkov/GROUP/full_eight.avi`.

A. A. Ardentov. *Cut locus in Euler's elastic problem* // Proceedings of Progranm Systems institute scientific-practical conference “Program systems: Theory and applications”, devoted to the 15$^{\text{th}}$ anniversary of Pereslavl University named A. K. Ailamazyan. — Pereslavl-Zalesskij, 2008. — p. 63—71. — ISBN 978-5-901795-13-2 *(in Russian)*.

Abstract. The article deals with Euler's problem on stationary configurations of elastic rod with fixed endpoints and tangents at the endpoints. A complete version of software for finding optimal rod for given boundary conditions was developed. The cut locus in the problem was studied. Mathematica programs for construction of the cut locus were written.

Перевод проверен: Ю. Л. Сачков