

А. П. Маштаков

Управление ориентацией сферы, катящейся по плоскости^{*})

Научный руководитель: доц. Ю. Л. Сачков

Аннотация. Работа является продолжением исследования задачи об оптимальном качении сферы по плоскости. В ней приведены последние результаты, полученные при описании закона изменения ориентации сферы при движении. Получена асимптотика экспоненциального отображения при качении сферы по кривым, близким к синусоиде.

1. Введение

Статья посвящена новым результатам, полученным в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости, и является продолжением курсовой работы за 3-ий курс (2007 год) [1]. Решение поставленной задачи имеет практическое значение в робототехнике: это инструкция того, каким образом нужно вращать предмет в руке роботоманипулятора (в случае плоской руки, то есть когда шар перекачивается по плоскости другой, параллельной плоскостью). Курсовая работа за 3-ий курс завершилась описанием проекций экстремальных кривых на плоскость (линий, по которым катится сфера). Осталась непроинтегрированной часть гамильтоновой системы для кватерниона, описывающего ориентацию сферы при качении. В пункте 2 статьи будет напоминание о том, как ставилась задача, и какие результаты были получены. Дальше последует описание того, что было сделано в текущем году, и, в заключение, что осталось сделать, чтобы считать задачу полностью решённой.

2. Постановка задачи и известные результаты

Задача ставится следующим образом. На плоскости фиксируются две точки ($A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$) и ориентация сферы в каждой из них. Ориентация задается репером (на рис. 1: e_{ij} — это j -ый вектор репера в момент времени i). Требуется найти кратчайшую кривую,

^{*})Представлено по тематике: *Методы оптимизации и теория управления.*

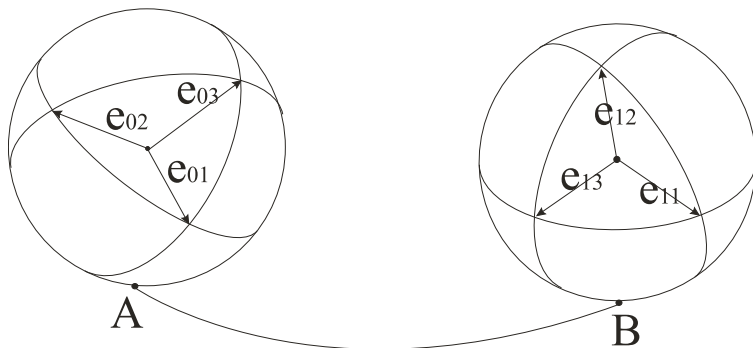


Рис. 1. Постановка задачи о качении сферы

соединяющую A и B , такую, что при качении по ней сферы ориентация в начальный и конечный момент времени совпадает с заданной. При этом запрещены проскальзывания и прокручивания.

Задача была поставлена как задача оптимального управления. Управляемая система имеет вид:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{q}_0 = \frac{1}{2}(q_2u - q_1v), \\ \dot{q}_1 = \frac{1}{2}(q_3u + q_0v), \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{2}(-q_0u + q_3v), \\ \dot{q}_3 = \frac{1}{2}(-q_1u - q_2v), \end{cases}$$

где (x, y) — координаты на плоскости, по которой катится сфера, а $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ — кватернион единичной длины ($|q| = 1$), задающий ориентацию сферы. Граничные условия:

$$(2) \quad \begin{cases} x(0) = 0, & x(t_1) = x_1, \\ y(0) = 0, & y(t_1) = y_1, \\ q(0) = (q_1(0), q_2(0), q_3(0), q_4(0)) = (1, 0, 0, 0), \\ q(t_1) = q^1. \end{cases}$$

Нужно минимизировать интеграл длины $\int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} dt$, вместо которого, что следует из неравенства Коши–Буняковского, можно минимизировать интеграл энергии $\frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min$.

Система (1) вполне управляема, и доказано существование оптимальных управлений [1].

Далее, используя принцип максимума Понтрягина [2], была выписана гамильтонова система, часть которой, для x и y , удалось проинтегрировать.

Для случая $E < Rr$:

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{R}{\sqrt{Rr}} (\cos \alpha (2(E(\phi_0 + \sqrt{Rrt}) - E(\phi_0)) - \sqrt{Rrt}) - \\ \quad - \sin \alpha (2k(\operatorname{cn}(\phi_0) - \operatorname{cn}(\phi_0 + \sqrt{Rrt}))), \\ y = \frac{R}{\sqrt{Rr}} (\sin \alpha (2(E(\phi_0 + \sqrt{Rrt}) - E(\phi_0)) - \sqrt{Rrt}) + \\ \quad + \cos \alpha (2k(\operatorname{cn}(\phi_0) - \operatorname{cn}(\phi_0 + \sqrt{Rrt}))). \end{cases}$$

Для случая $E > Rr$:

$$(4) \quad \begin{cases} x = \frac{R}{\sqrt{Rr}} (\cos \alpha (\sqrt{Rrt}(1 - \frac{2}{k^2}) + \frac{2}{k}(E(\frac{\phi_0 + \sqrt{Rrt}}{k}) - E(\frac{\phi_0}{k}))) - \\ \quad - \sin \alpha (\frac{2}{k}(\operatorname{dn}(\frac{\phi_0}{k}) - \operatorname{dn}(\frac{\phi_0 + \sqrt{Rrt}}{k}))), \\ y = \frac{R}{\sqrt{Rr}} (\sin \alpha (\sqrt{Rrt}(1 - \frac{2}{k^2}) + \frac{2}{k}(E(\frac{\phi_0 + \sqrt{Rrt}}{k}) - E(\frac{\phi_0}{k}))) + \\ \quad + \cos \alpha (\frac{2}{k}(\operatorname{dn}(\frac{\phi_0}{k}) - \operatorname{dn}(\frac{\phi_0 + \sqrt{Rrt}}{k}))). \end{cases}$$

Для случая $E = Rr$:

$$(5) \quad \begin{cases} x = \frac{R}{\sqrt{Rr}} (\cos \alpha (-\sqrt{Rrt} + 2(\tanh(\phi_0 + \sqrt{Rrt}) - \tanh \phi_0)) + \\ \quad + \sin \alpha (2(\frac{1}{\cosh(\phi_0 + \sqrt{Rrt})} - \frac{1}{\cosh \phi_0}))), \\ y = \frac{R}{\sqrt{Rr}} (\sin \alpha (-\sqrt{Rrt} + 2(\tanh(\phi_0 + \sqrt{Rrt}) - \tanh \phi_0)) - \\ \quad - \cos \alpha (2(\frac{1}{\cosh(\phi_0 + \sqrt{Rrt})} - \frac{1}{\cosh \phi_0}))). \end{cases}$$

Здесь E — полная энергия математического маятника, который возникает в гамильтоновой системе (см. далее (13)), а cn , sn , dn , E — эллиптические функции Якоби; R и r — первые интегралы гамильтоновой системы принципа максимума; ϕ_0 и k — эллиптические координаты в фазовой плоскости маятника [1].

3. Эквивалентная форма управляемой системы

Ориентация сферы описывается вращением, которое можно задать матрицей R . Вращение является элементом группы $SO(3)$, которую можно параметризовать, например, кватернионами или углами Эйлера. Таким образом, имеется связь между кватернионом, углами Эйлера и матрицей вращения [3–5].

Для интегрирования гамильтоновой системы оказалось проще использовать матрицу вращения и параметризовать вращение не кватернионом, а углами Эйлера [6].

Запишем управляемую систему, используя для описания ориентации матрицу вращения R [6]:

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} = u, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \dot{y} = v, & (u, v) \in \mathbb{R}^2 \\ \dot{R} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & 0 & -v \\ u & v & 0 \end{pmatrix}, & R \in SO(3). \end{cases}$$

4. Некоторые результаты из статьи В. Джарджевича

В. Джарджевич первым детально рассмотрел задачу о качении сферы по плоскости [6]. Использованная им техника помогла получить новые результаты, относящиеся к описанию ориентации сферы при качении. Восстановим цепочку рассуждений.

Итак, есть управляемая система (6) и интеграл энергии

$$\int_0^{t_1} \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} dt,$$

который нужно минимизировать вдоль всех решений системы (6)

$$g(t) = (x(t), y(t), R(t)),$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$g(0) = (0, 0, \text{Id}) \text{ и } g(t_1) = (x_1, y_1, R_1).$$

Джарджевичем была выписана гамильтонова система в специально выбранных координатах h_1, h_2, H_1, H_2, H_3 , в которых подсистема для сопряженных переменных не зависит от подсистемы для переменных состояния. Вот ее часть для сопряженных переменных:

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = 0, \\ \dot{h}_2 = 0, \\ \dot{H}_1 = (h_1 - H_2)H_3, \\ \dot{H}_2 = (h_2 + H_1)H_3, \\ \dot{H}_3 = -h_1H_1 - h_2H_2. \end{cases}$$

Гамильтониан имеет вид:

$$(8) \quad H = \frac{1}{2}(h_1 - H_2)^2 + \frac{1}{2}(h_2 + H_1)^2.$$

Система (7) имеет первые интегралы h_1 , h_2 , H и $M = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$.

Также в статье приведено соответствие векторов из \mathbb{R}^3 и кососимметрических матриц, задающих угловую скорость катящегося тела. Используя это соответствие, были выписаны две матрицы

$$(9) \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & -H_3(t) & H_2(t) \\ H_3(t) & 0 & -H_1(t) \\ -H_2(t) & H_1(t) & 0 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$(10) \quad \Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(h_1 - H_2) \\ 0 & 0 & -(h_2 + H_1) \\ (h_1 - H_2) & (h_2 + H_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда последние 3 уравнения системы (7) запишутся через P и Ω следующим образом:

$$(11) \quad \frac{dP}{dt} = [\Omega, P].$$

Первым интегралом системы (11) является выражение

$$(12) \quad \Lambda = R(t)P(t)R^{-1}(t),$$

это постоянная антисимметричная матрица.

Далее были введены полярные углы α и $\theta(t) + \alpha$. Повернутая на α система (\bar{x}, \bar{y}) , \bar{R} , \bar{P} , $\bar{\Omega}$ имеет более простой вид [6]. Угол θ в силу системы (11) удовлетворяет уравнению маятника

$$(13) \quad \ddot{\theta} = -A \sin \theta.$$

Затем для определения R были введены углы Эйлера ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Матрица R выражается через ϕ_i следующим образом:

$$(14) \quad R = e^{\phi_1(t)A_3} e^{\phi_2(t)A_2} e^{\phi_3(t)A_3} R_0.$$

Здесь A_2 и A_3 — постоянные матрицы, а R_0 — матрица, задающая поворот на угол α вокруг вертикальной оси:

$$(15) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(16) \quad R_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы выразить ϕ_i в квадратурах, Джарджевич вводит условие

$$(17) \quad \bar{\Lambda} = \sqrt{M}A_3.$$

Смысл этого ограничения заключается в следующем. Конец вектора $(\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3)$ в любой момент времени находится на сфере радиуса \sqrt{M} . Условие (17) означает, что в начальный момент времени $\bar{H}_1(0) = 0$, $\bar{H}_2(0) = 0$, $\bar{H}_3(0) = \sqrt{M}$, то есть вектор направлен по оси \bar{H}_3 , см. рис. 2.

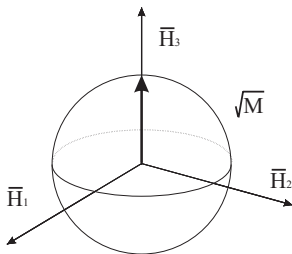


РИС. 2. Геометрический смысл условия (17)

Введение ограничения (17) позволило написать дифференциальные уравнения для ϕ_i (18), а также выражения для $\sin \phi_2$, $\cos \phi_2$, $\sin \phi_3$ и $\cos \phi_3$. Однако, как оказалось, в работе Джарджевича [6] эти формулы приведены с ошибкой в знаке. О том, как это было обнаружено и исправлено, рассказывается дальше.

5. Связь обозначений

Установим соответствие в обозначениях и сравним результаты, полученные в статье [6] и курсовой работе [1]. В таблице 1 приведена связь обозначений в курсовой работе за прошлый год [1] и статье [6].

При такой замене в обозначениях, гамильтоновы системы в статье [6] и в курсовой работе [1] имеют одинаковую запись.

Курсовая	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	Rr	R	r
Джарджевич	h_1	h_1	$-H_2$	H_1	H_3	A	$\sqrt{2H}$	$\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$

ТАБЛИЦА 1. Связь обозначений

6. О программах проверки решения в системе „Mathematica“

Для проверки правильности получаемых результатов, были написаны две программы в системе „Mathematica“ [7]. Одна из них, визуализирующая качение, была написана в ходе курсовой работы за прошлый год. По неправильному на вид качению можно судить о наличии ошибки. Этот способ проверки неоднократно использовался и в этом году.

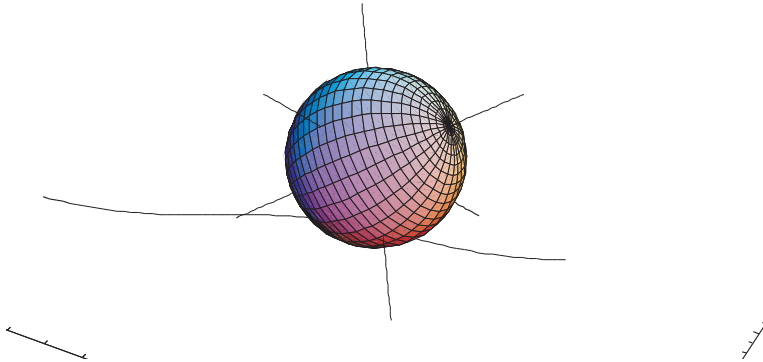


Рис. 3. Программа анимации качения

Приведенные Джарджевичем формулы [6] не дали правильного качения. Это указывало на наличие ошибок в формулах. Как оказалось, при записи уравнений была допущена неточность в знаках. Для того чтобы выбрать правильный знак, потребовалось проверить, удовлетворяет ли решение системе (11) при различных значениях параметров. Специально для этого была написана вторая программа, которая при различных значениях t считает максимальное отклонение от нуля матричной функции $\dot{R} - R\Omega$. Если максимальное отклонение не превышает вычислительной погрешности, то тест считается

успешно пройденным. Эта программа помогла получить правильные выражения для ϕ_i , которые затем были обоснованы.

7. Асимптотический закон изменения ориентации сферы при качении

7.1. Интегрирование системы при условии $\bar{\Lambda} = \sqrt{M}A_3$

Дифференциальные уравнения для углов Эйлера при дополнительном условии (17) с правильными знаками выглядят следующим образом:

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{\phi}_1 = \frac{(2H - A \cos \theta)\sqrt{M}}{M - 2(E + A \cos \theta)}, \\ \dot{\phi}_2 = s_2 \frac{A \sin \theta}{\sqrt{M - 2(E + A \cos \theta)}}, \text{ где } s_2 = \text{sign} \sin \phi_2, \\ \dot{\phi}_3 = -\frac{(2H - A \cos \theta)\dot{\theta}}{M - 2(E + A \cos \theta)}. \end{cases}$$

Но эти формулы справедливы лишь при ограничении (17), из которого следует, что $A = 1$, $\dot{\theta}_0 > 0$ и $\theta_0 = 2\pi n$. Последнее условие можно фиксировать $\theta_0 = 0$. Гамильтониан H также можно фиксировать $H = \frac{1}{2}$, так как различные значения H соответствуют прохождению одной и той же кривой с разной скоростью. Выбирая $H = \frac{1}{2}$, мы выбираем натуральный параметр на кривой (x, y) . Эти условия упрощают формулы для ϕ_i :

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{\phi}_1 = \frac{\dot{\theta}_0}{2}, \\ \dot{\phi}_2 = s \cos \frac{\theta}{2}, \\ \dot{\phi}_3 = -\frac{\dot{\theta}}{2}, \end{cases}$$

где $s_1 = \text{sign} \sin \frac{\theta}{2}$, $s = s_1 s_2$.

Краевые условия для системы (19) можно получить из условия $R(0) = \text{Id}$. Тогда $\bar{R}(0) = e^{\alpha A_3} = e^{\phi_1^0 A_3} e^{\phi_2^0 A_2} e^{\phi_3^0 A_3}$, откуда

$$(20) \quad \begin{cases} \phi_2^0 = 0, \\ \phi_3^0 = (s + 1)\frac{\pi}{2}, \\ \phi_1^0 = \alpha - (s + 1)\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим асимптотический случай, когда амплитуда колебания маятника мала. В этом случае на фазовом портрете маятника траектория близка к окружности, а кривые на плоскости в главном приближении — синусоиды малой амплитуды, см. далее (22).

Введем эллиптические координаты [8], при $k \rightarrow 0$:

$$(21) \quad \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn} \psi = k \sin \psi + O(k^3), \\ \cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{dn} \psi = 1 + O(k^2), \\ \frac{c}{2} = k \operatorname{cn} \psi = k \cos \psi + O(k^3). \end{cases}$$

Экстремали на плоскости примут вид [1]:

$$(22) \quad \begin{cases} x(t) = t \cos \alpha - 2k \sin \alpha (1 - \cos t) + O(k^2), \\ y(t) = t \sin \alpha - 2k \cos \alpha (1 - \cos t) + O(k^2). \end{cases}$$

Система для ϕ_i запишется в виде:

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{\phi}_1 = k + O(k^3), \\ \dot{\phi}_2 = s + O(k^2), \\ \dot{\phi}_3 = -k \cos \psi + O(k^3). \end{cases}$$

Проинтегрировав ее, получаем выражения для углов Эйлера:

$$(24) \quad \begin{cases} \phi_1 = kt + \alpha - (s+1)\frac{\pi}{2} + O(k^3), \\ \phi_2 = st + O(k^2), \\ \phi_3 = (s+1)\frac{\pi}{2} - k \sin t + O(k^3). \end{cases}$$

Матрица вращения определяется через углы Эйлера формулой (14).

7.2. Интегрирование системы в общем случае

Помимо дифференциальных уравнений углов Эйлера в статье Джарджевича [6], для случая $\bar{\Lambda} = \sqrt{M}A_3$ имеются выражения для $\sin \phi_2$, $\cos \phi_2$, $\sin \phi_3$ и $\cos \phi_3$:

$$(25) \quad \begin{cases} \sin \phi_2 = \frac{s_2 \sqrt{1-2A \cos \theta + A^2}}{\sqrt{M}}, \\ \cos \phi_2 = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{M}}, \\ \sin \phi_3 = s_2 \frac{A - \cos \theta}{\sqrt{M-2(E+A \cos \theta)}}, \\ \cos \phi_3 = -s_2 \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-2A \cos \theta + A^2}}. \end{cases}$$

и уравнение для ϕ_1 :

$$(26) \quad \phi_1 = \alpha - (s+1)\frac{\pi}{2} + \sqrt{M} \int_0^t \frac{1 - A \cos \theta(\tau)}{1 - 2A \cos \theta(\tau) + A^2} d\tau,$$

где $\sqrt{M} = \sqrt{1 + A^2 - 2A \cos \theta_0 + \dot{\theta}_0^2}$.

В общем случае (при $\Lambda \neq \sqrt{MA_3}$), из инвариантности системы (6) относительно поворотов на элементы $SO(3)$ следует, что матрица вращения R записывается как произведение двух матриц:

$$(27) \quad R(t) = C^{-1} R_*(t).$$

Здесь $C^{-1} = R_*^{-1}(0)$, $R_*(t) = e^{\phi_1(t)A_3} e^{\phi_2(t)A_2} e^{\phi_3(t)A_3} R_0$, а углы ϕ_i вычисляются по формулам (25), (26).

Вычислим асимптотику углов ϕ_i . Введем эллиптические координаты:

$$(28) \quad \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn} \sqrt{A}\psi = k \sin \sqrt{A}\psi + O(k^3), \\ \cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{dn} \sqrt{A}\psi = 1 + O(k^2), \\ \frac{c}{2} = k\sqrt{A} \operatorname{cn} \sqrt{A}\psi = k\sqrt{A} \cos \sqrt{A}\psi + O(k^3). \end{cases}$$

Для θ , $\dot{\theta}$, x и y получается следующая асимптотика:

$$(29) \quad \begin{cases} \theta = 2k \sin(\sqrt{A}\psi) + O(k^3), \\ \dot{\theta} = 2k\sqrt{A} \cos(\sqrt{A}\psi) + O(k^3), \\ x = t \cos \alpha - \frac{2k}{\sqrt{A}} (\cos(\sqrt{A}\psi_0) - \cos(\sqrt{A}(\psi_0 + t))) \sin \alpha + O(k^2), \\ y = t \sin \alpha + \frac{2k}{\sqrt{A}} (\cos(\sqrt{A}\psi_0) - \cos(\sqrt{A}(\psi_0 + t))) \cos \alpha + O(k^2). \end{cases}$$

А вот соответствующие выражения для углов Эйлера:

$$(30) \quad \begin{cases} \phi_1 = \alpha - (s+1)\frac{\pi}{2} - s_3 t + O(k^2), \\ \cos \phi_2 = 2\sqrt{A}k \cos(\sqrt{A}\psi) / ((A-1)s_3) + O(k^2), \\ \sin \phi_2 = s_2 + O(k^2), \\ \cos \phi_3 = -2ks_2 s_3 \sin(\sqrt{A}\psi) / (A-1) + O(k^2), \\ \sin \phi_3 = s_2 s_3 + O(k^2), \end{cases}$$

где $s_3 = \operatorname{sign}(A-1)$.

Получаем асимптотику для ϕ_i :

$$(31) \quad \begin{cases} \phi_1 = \alpha - (s+1)\frac{\pi}{2} - s_3 t + O(k^2), \\ \phi_2 = s_2(\frac{\pi}{2} - 2k\sqrt{A} \cos(\sqrt{A}\psi(t)) / (s_3(A-1))) + O(k^2), \\ \phi_3 = s_2 s_3 \frac{\pi}{2} + 2k \sin(\sqrt{A}\psi(t)) / (A-1) + O(k^2). \end{cases}$$

Асимптотика для R при $k \rightarrow 0$ имеет вид

$$R(t) = R^0(t) + O(k),$$

где $R^0(t) =$

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \alpha \cos(t) + \sin^2 \alpha & \cos \alpha (\cos(t) - 1) \sin \alpha & \cos \alpha \sin(t) \\ \cos \alpha (\cos(t) - 1) \sin \alpha & \cos^2 \alpha + \cos(t) \sin^2 \alpha & \sin \alpha \sin(t) \\ -\cos \alpha \sin(t) & -\sin \alpha \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Параметризуем матрицу R кватернионом. Матрица R_* является произведением ортогональных матриц $e^{\phi_1(t)A_3}$, $e^{\phi_2(t)A_2}$, $e^{\phi_3(t)A_3}$ и R_0 . Для каждой из этих матриц выписываем соответствующий ей кватернион [1]:

$$(32) \quad \begin{cases} q_1 = \cos \frac{\phi_1}{2} + k \sin \frac{\phi_1}{2}, \\ q_2 = \cos \frac{\phi_2}{2} + j \sin \frac{\phi_2}{2}, \\ q_3 = \cos \frac{\phi_3}{2} + k \sin \frac{\phi_3}{2}, \\ q_{R_0} = \cos \frac{\alpha}{2} - k \sin \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Результирующий кватернион для R_* будет являться произведением кватернионов (32). Используя тот факт, что $C^{-1} = R_*^{-1}(0)$ и выражения (31), асимптотика для кватерниона q , соответствующего матрице R , запишется:

$$q(t) = q^0(t) + kq^1(t) + O(k^2).$$

Здесь

$$(33) \quad q^0(t) = \cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \sin \alpha - j \sin \frac{t}{2} \cos \alpha,$$

а $q^1(t)$ имеет вид:

$$(34) \quad q^1(t) = q_0^1(t) + iq_1^1(t) + jq_2^1(t) + kq_3^1(t),$$

где компоненты $q_i^1(t)$ вычисляются по формулам

$$(35) \quad \begin{cases} q_0^1(t) = 0, \\ q_1^1(t) = \frac{2 \sin(\frac{\sqrt{A}}{2}(2\psi_0+t)) \cos \alpha}{A-1} (\sqrt{A} \cos \frac{t}{2} \sin \frac{\sqrt{A}t}{2} - \cos \frac{\sqrt{A}t}{2} \sin \frac{t}{2}), \\ q_2^1(t) = \frac{2 \sin(\frac{\sqrt{A}}{2}(2\psi_0+t)) \sin \alpha}{A-1} (\sqrt{A} \cos \frac{t}{2} \sin \frac{\sqrt{A}t}{2} - \cos \frac{\sqrt{A}t}{2} \sin \frac{t}{2}), \\ q_3^1(t) = \frac{1}{A-1} (-\cos \frac{t}{2} (\sin(\sqrt{A}\psi_0) - \sin(\sqrt{A}(\psi_0+t))) - \\ - \sqrt{A} \sin \frac{t}{2} (\cos(\sqrt{A}\psi_0) + \cos(\sqrt{A}(\psi_0+t))). \end{cases}$$

8. Сопряженные точки

Одной из причин, по которой траектория может потерять свою оптимальность, является наличие сопряженной точки. Сопряженные точки являются критическими значениями экспоненциального отображения

$$\exp : (k, \psi_0, A, \alpha, t) \rightarrow (x, y, q_1, q_2, q_3),$$

действующего из пространства параметров в пространство состояний [9]. Здесь вращение задается кватернионом $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$.

Предполагается искать первую сопряженную точку вдоль экстремальной траектории. Такие точки будут образовывать поверхность в пространстве $(k, \psi_0, A, \alpha, t)$, которая называется каустикой. Ближайшей целью является построение этой поверхности.

9. Заключение

В статье приведены формулы, описывающие качение сферы по экстремальным траекториям, для асимптотического случая, когда $k \rightarrow 0$. С помощью этих формул будет исследована асимптотика при $k \rightarrow 0$ сопряженных точек. Дальше в планах заняться отысканием точек Максвелла, которые являются второй причиной, по которой оптимальность может теряться. Затем полагается проделать то же самое для общего случая. После того, как эта работа будет закончена, нужно будет написать программу, которая будет обращать экспоненциальное отображение и позволит по краевым условиям находить оптимальное решение. Тогда задача будет решена.

Список литературы

- [1] Маштаков А. П. *Экстремальные кривые в задаче о качении сферы по плоскости* // Материалы XI научной студенческой конференции университета города Переславля им. А. К. Айламазяна. — г. Переславль-Залесский: Издательство УГП, 2007, с. 23–30, Эл. ресурс: <http://wiki.botik.ru/pub/IS4UGP/StudConf/1-1/04-mashtakov-p-23.pdf>.
- [2] Зеликин М. И. *Оптимальное управление и вариационное исчисление*. — М.: УРСС, 2004. — 160 с.
- [3] Арнольд В. И. *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов*. — М.: МЦНМО, 2002. — 40 с.
- [4] Понтрягин Л. С. *Обобщения чисел*. — М.: Наука, 1986. — 121 с.
- [5] Уиттекер Э. *Аналитическая динамика*. — М.: УРСС. — 586 с.
- [6] Jurdjevic V. *The Geometry of the Plate-Ball Problem* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — Heidelberg: Springer Berlin, 1993, с. 305–328.

- [7] Wolfram S. Mathematica: a system for doing mathematics by computer. — Redwood City, CA USA: Adisson–Wesley, 1991. — 961 с.
- [8] Сачков Ю. Л. Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник, 194, 9, 2003, с. 63–90.
- [9] Аграчёв А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005. — 391 с.

A. P. Mashtakov. *Orientation control of the sphere rolling on the plane* // Proceedings of Program Systems institute scientific-practical conference “Program systems: Theory and applications”, devoted to the 15th anniversary of Pereslavl University named A. K. Ailamazyan. — Pereslavl-Zalesskij, 2008. — p. 149–161. — ISBN 978-5-901795-13-2 (*in Russian*).

ABSTRACT. The paper is a continuation of the study of optimal rolling of a sphere on a plane. The work contains recent results on description of orientation of the rolling sphere. The asymptotics of the exponential mapping corresponding to sphere rolling along sinusoids is obtained.

Перевод проверен: доц. Ю. Л. Сачков