Интерполяция, более точная уже по немногим значениям. Теоретическое обоснование

С.В. Знаменский
E-mail: svz@latex.pereslavl.ru

ИПС им. А.К. Айламазяна РАН

Совещание "Математика в эпоху суперкомпьютеров",
23.11.2020, 9:20–9:40

Переславль-Залесский, 2020

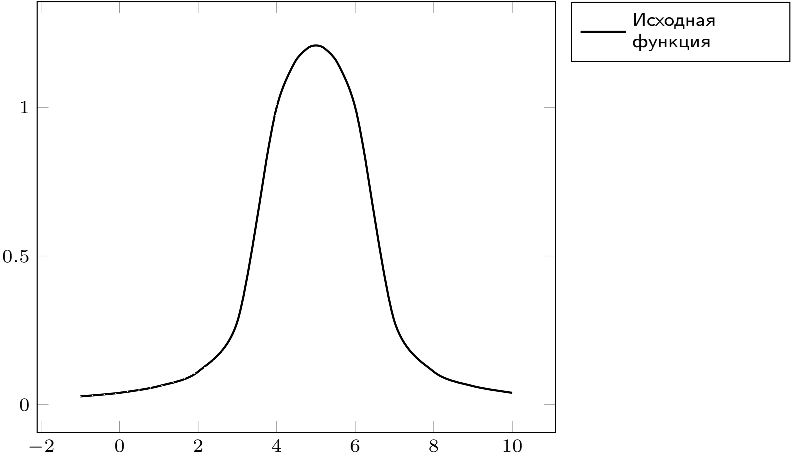
Общая постановка задачи

Общая постановка задачи интерполяции:

Дан набор $y = f|_X$ значений на конечном подмножестве $X \subset \mathcal{X}$ неизвестной функции $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.
Предполагая, что значения чётко передают особенности поведения функции на $\mathcal{X}$, требуется реконструировать f.

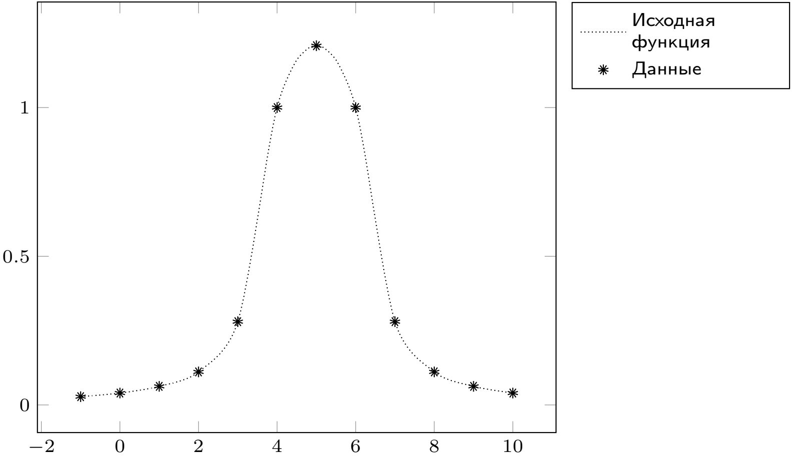
Для начала простейший случай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Задача некорректна, но востребована.

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



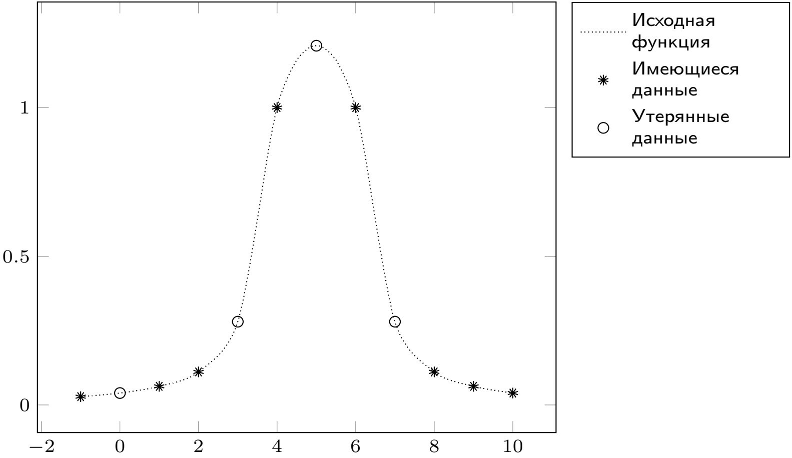
Естественные зависимости должны успешно восстанавливаться.

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



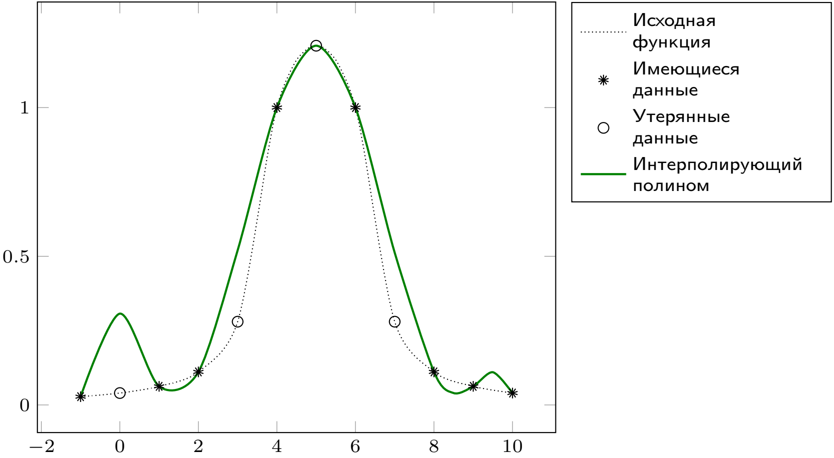
В случае равномерных отсчётов ситуация терпима.

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



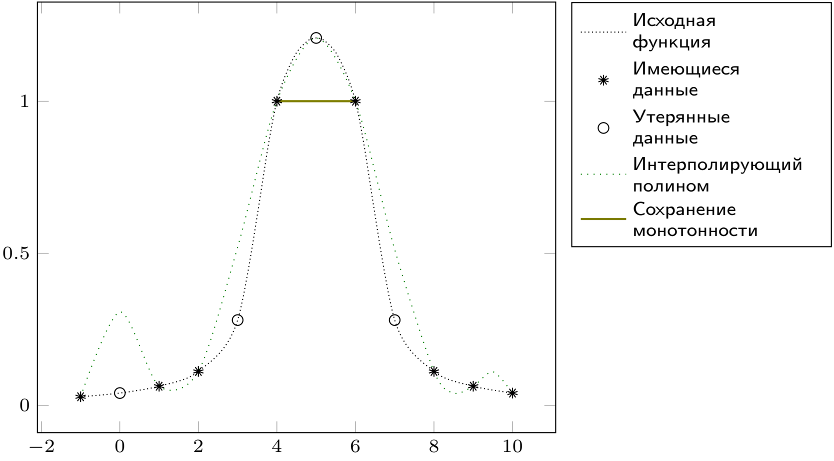
Однако часть данных может теряться.

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



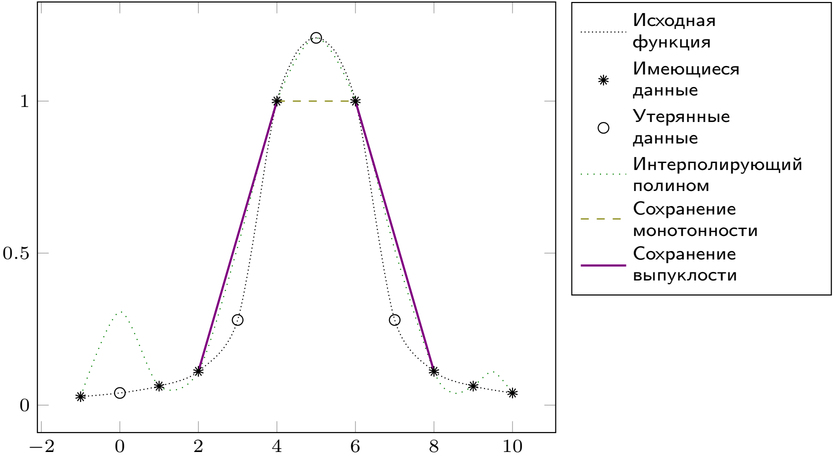
Полиномиальная интерполяция колеблется. Она может сохранять формы.

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



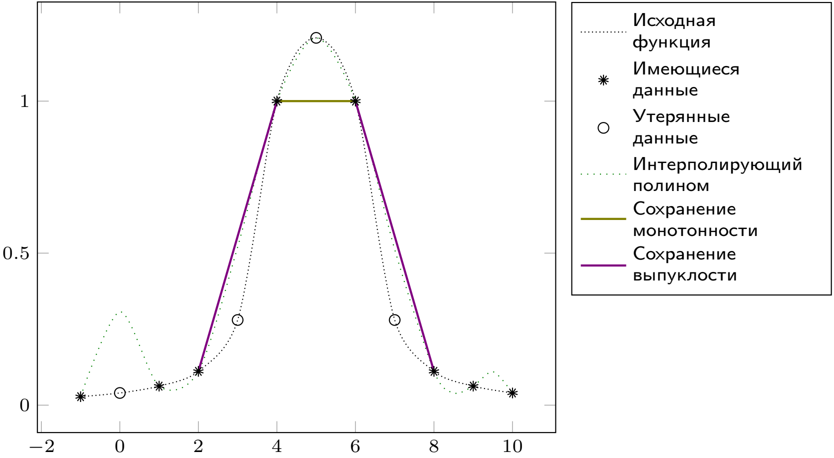
Сохранение монотонности требует постоянства на $[4, 6]$.

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



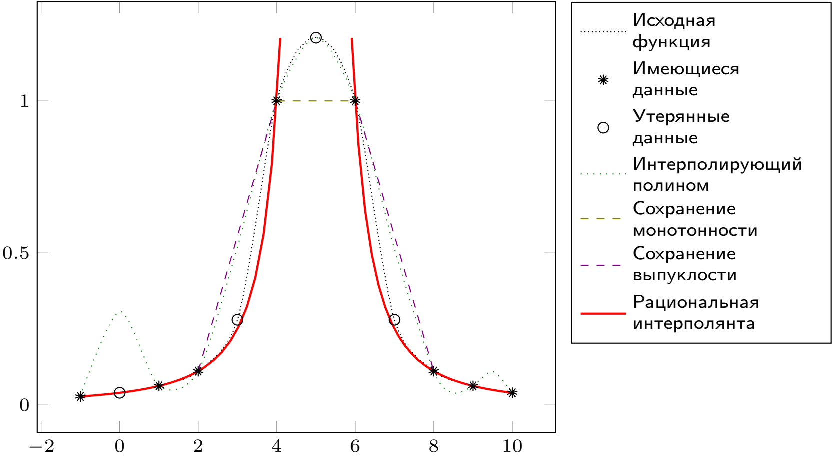
Сохранение выпуклости требует линейности на двух промежутках.

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



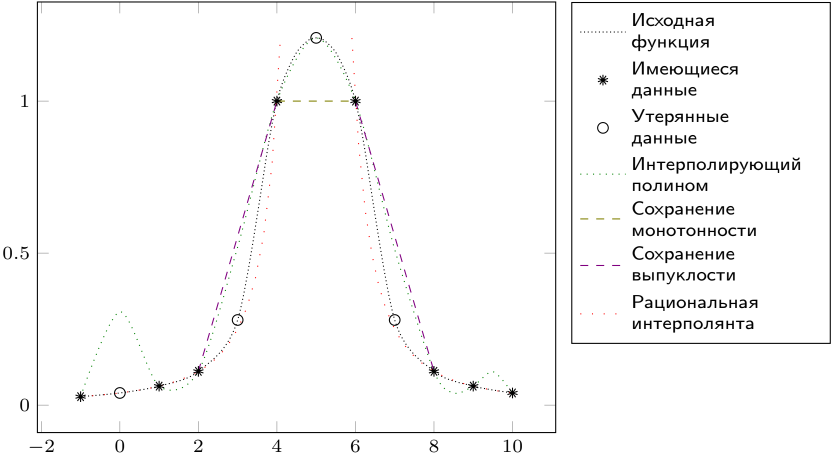
Сохранение монотонности и выпуклости несовместимо с гладкостью.

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



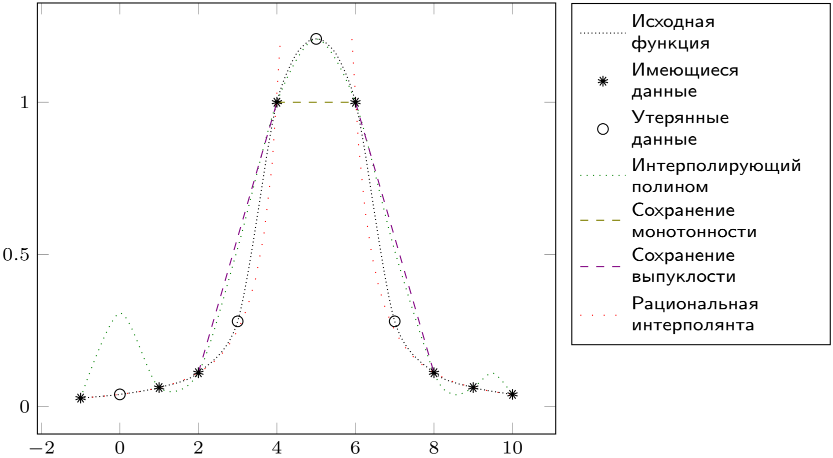
Рациональная интерполяция может иметь полюс.

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



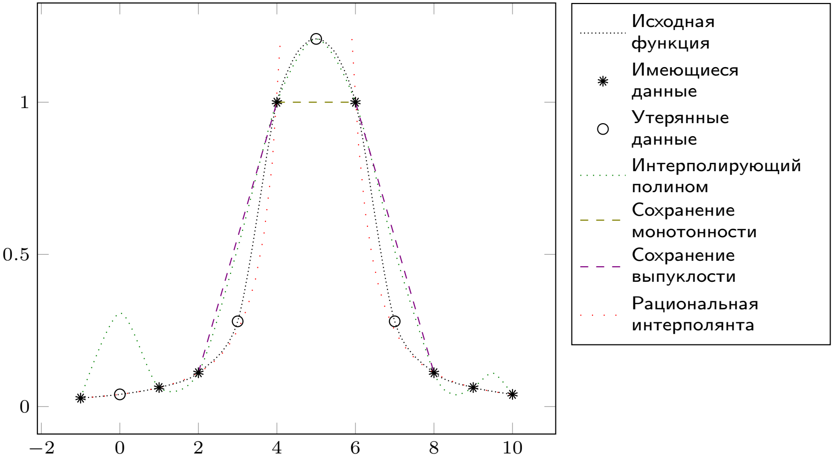
Различные оптимальные сплайны не вполне адекватны по критерию оптимизации

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



Даже чертёжное лекало эффективнее!!! А что если сочетать полиномы и рациональные функции?

Уж этому-то компьютер должен был научиться...



Даже чертёжное лекало эффективнее!!! А что если сочетать полиномы и рациональные функции?

Подход Щабака: сплайн из разных семейств

Полиномиально-рациональное сочетание интерполянт

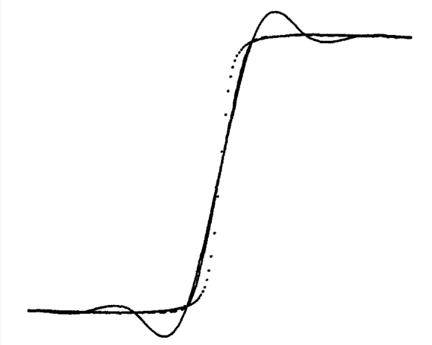


Fig. 1. $f(x) = \arctan(100x - 50)$, 8 knots.

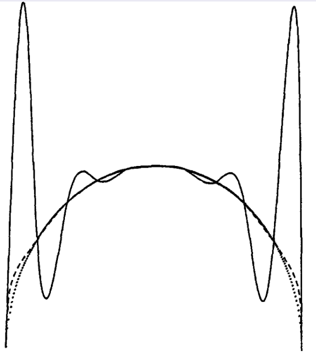


Fig. 3. $f(x) = -0.0001 + \sqrt{0.5001^2 - (x - 0.5)^2}$, 11 knots.

R. Schaback. Adaptive rational splines. Constr. Approx., 6(2):167–179, 1990. http://dx.doi.org/10.1007/BF01889356

Подход Щабака: сплайн из разных семейств

Полиномиально-рациональное сочетание интерполянт

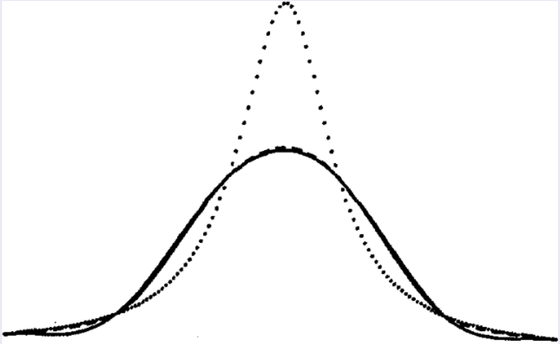


Fig. 2. $f(x) = (100x^2 - 100x + 26)^{-1}$, 6 knots.

R. Schaback. Adaptive rational splines. Constr. Approx., 6(2):167–179, 1990. http://dx.doi.org/10.1007/BF01889356

Подход Щабака: сплайн из разных семейств

Полиномиально-рациональное сочетание интерполянт

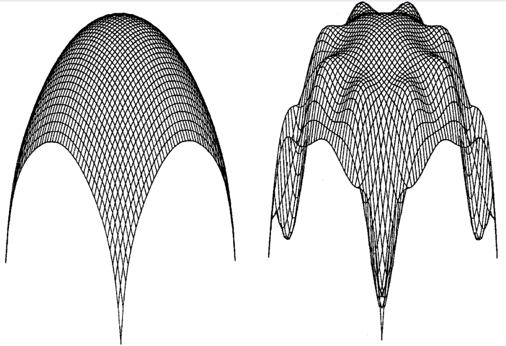


Fig. 4. Purely rational bivariate spline interpolant, 5×5-grid.

Fig. 5 Bicubic spline interpolant, same data as Fig. 4.

R. Schaback. Adaptive rational splines. Constr. Approx., 6(2):167–179, 1990. http://dx.doi.org/10.1007/BF01889356

Подход Щабака: сплайн из разных семейств

Полиномиально-рациональное сочетание интерполянт

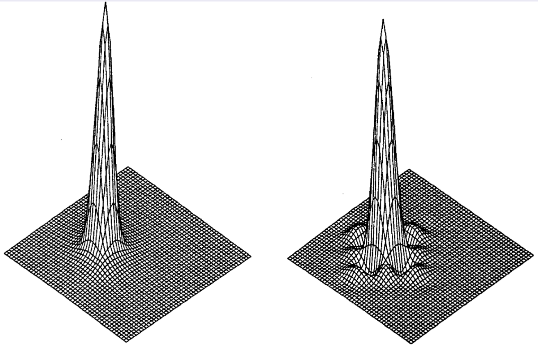


Fig. 6. Adaptive rational spline interpolant, 11×11-grid.

Fig. 7. Bicubic spline interpolant, same data as Fig. 6.

R. Schaback. Adaptive rational splines. Constr. Approx., 6(2):167–179, 1990. http://dx.doi.org/10.1007/BF01889356

Неужели тупик?

Почему работ по сочетанию интерполянт больше не было?

Возможные причины:

- Неразумность выбора: полиномы использовалась лишь при отсутствии монотонности и, например, при восстановлении функции $y = x^2$ по её значениям в положительных точках вместо квадратичных полиномов использовались дроби с невырожденными знаменателями, что неизбежно повышало ошибки при восстановлении таких функций.
- Внимания исследователей на сохранении формы, при котором в принципе можно обойтись одним семейством, не привлекая серии новых постановок задач.
- Нелокальность и нетривиальность алгоритма.

Неужели тупик?

Почему работ по сочетанию интерполянт больше не было?

Возможные причины:

- Неразумность выбора: полиномы использовалась лишь при отсутствии монотонности и, например, при восстановлении функции $y = x^2$ по её значениям в положительных точках вместо квадратичных полиномов использовались дроби с невырожденными знаменателями, что неизбежно повышало ошибки при восстановлении таких функций.
- Внимания исследователей на сохранении формы, при котором в принципе можно обойтись одним семейством, не привлекая серии новых постановок задач.
- Нелокальность и нетривиальность алгоритма.

Неужели тупик?

Почему работ по сочетанию интерполянт больше не было?

Возможные причины:

- Неразумность выбора: полиномы использовалась лишь при отсутствии монотонности и, например, при восстановлении функции $y = x^2$ по её значениям в положительных точках вместо квадратичных полиномов использовались дроби с невырожденными знаменателями, что неизбежно повышало ошибки при восстановлении таких функций.
- Внимания исследователей на сохранении формы, при котором в принципе можно обойтись одним семейством, не привлекая серии новых постановок задач.
- Нелокальность и нетривиальность алгоритма.

Неужели тупик?

Почему работ по сочетанию интерполянт больше не было?

Возможные причины:

- Неразумность выбора: полиномы использовалась лишь при отсутствии монотонности и, например, при восстановлении функции $y = x^2$ по её значениям в положительных точках вместо квадратичных полиномов использовались дроби с невырожденными знаменателями, что неизбежно повышало ошибки при восстановлении таких функций.
- Внимания исследователей на сохранении формы, при котором в принципе можно обойтись одним семейством, не привлекая серии новых постановок задач.
- Нелокальность и нетривиальность алгоритма.

Неужели тупик?

Почему работ по сочетанию интерполянт больше не было?

Возможные причины:

- Неразумность выбора: полиномы использовалась лишь при отсутствии монотонности и, например, при восстановлении функции $y = x^2$ по её значениям в положительных точках вместо квадратичных полиномов использовались дроби с невырожденными знаменателями, что неизбежно повышало ошибки при восстановлении таких функций.
- Внимания исследователей на сохранении формы, при котором в принципе можно обойтись одним семейством, не привлекая серии новых постановок задач.
- Нелокальность и нетривиальность алгоритма.

Неужели тупик?

Почему работ по сочетанию интерполянт больше не было?

Возможные причины:

- Неразумность выбора: полиномы использовалась лишь при отсутствии монотонности и, например, при восстановлении функции $y = x^2$ по её значениям в положительных точках вместо квадратичных полиномов использовались дроби с невырожденными знаменателями, что неизбежно повышало ошибки при восстановлении таких функций.
- Внимания исследователей на сохранении формы, при котором в принципе можно обойтись одним семейством, не привлекая серии новых постановок задач.
- Нелокальность и нетривиальность алгоритма.

К эффективной интерполяции по немногим значениям

Путь к разумному выбору интерполянты

- Использовать и безошибочно восстанавливать простейшие функций — полиномов и рациональных дробей малых степеней.
- Проработать схему выбора интерполянты и превзойти тщательное использование чертёжных лекал
- Проверить восстановлением важнейших элементарных и специальных функций по немногим значениям.

К эффективной интерполяции по немногим значениям

Путь к разумному выбору интерполянты

- Использовать и безошибочно восстанавливать простейшие функций — полиномов и рациональных дробей малых степеней.
- Проработать схему выбора интерполянты и превзойти тщательное использование чертёжных лекал
- Проверить восстановлением важнейших элементарных и специальных функций по немногим значениям.

К эффективной интерполяции по немногим значениям

Путь к разумному выбору интерполянты

- Использовать и безошибочно восстанавливать простейшие функций — полиномов и рациональных дробей малых степеней.
- Проработать схему выбора интерполянты и превзойти тщательное использование чертёжных лекал
- Проверить восстановлением важнейших элементарных и специальных функций по немногим значениям.

К эффективной интерполяции по немногим значениям

Путь к разумному выбору интерполянты

- Использовать и безошибочно восстанавливать простейшие функций — полиномов и рациональных дробей малых степеней.
- Проработать схему выбора интерполянты и превзойти тщательное использование чертёжных лекал
- Проверить восстановлением важнейших элементарных и специальных функций по немногим значениям.

К эффективной интерполяции по немногим значениям

Путь к разумному выбору интерполянты

- Использовать и безошибочно восстанавливать простейшие функций — полиномов и рациональных дробей малых степеней.
- Проработать схему выбора интерполянты и превзойти тщательное использование чертёжных лекал
- Проверить восстановлением важнейших элементарных и специальных функций по немногим значениям.

Техника тщательного использования лекал

Для участка BC подогнано лекало, точка D лучше, чем A

Лекала прилегают по 2 или 3 точкам. Прилегание по двум точкам с притяжением к двум соседним здесь не сработает.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset \mathcal{X}$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset \mathcal{X}$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset X$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset \mathcal{X}$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset \mathfrak{X}$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset \mathcal{X}$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset \mathcal{X}$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset \mathcal{X}$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset \mathfrak{X}$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Новые постановки задач

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Идея алгоритма

Локальная постановка для $M \subset \mathcal{X}$ (аналог наложения лекала

- набор узлов интерполяции (аналог 2-3 точек непосредственного прилегания),
- набор референтных узлов (аналог 1-2 точек притяжения лекала),
- выбор семейства(формулы) (аналог выбора лекала).

Целевой функционал должен учитывать

- Близость к референтным узлам,
- Выбор референтных и интерполяционных узлов.

Для точного восстановления интерполянт

- Сделать конфликты невероятными.
- Проработать разрешение конфликтов.

Чувствительность ошибки к выбору узлов

Теорема

Ошибка в точке интерполяции полинома наименьшей степени пропорциональна произведению расстояний от этой точки до узлов полинома.

Следствие

Пусть $\{0, \ldots, n\}$ — система равнораспределённых узлов. Тогда ошибка вблизи узла k пропорциональна биномиальному коэффициенту C_n^k.

Простота формулы предлагает эвристически использовать её при отсутствии ясных альтернатив.

Определение лекала

Определение

Лекало — *это формула интерполянты с независимыми коэффициентами и формула вычисления коэффициентов по значениям в узлах.*

размерность лекала — *количество коэффициентов.*

Для множества $M \subset \mathfrak{X}$ и набора значений y

нижняя размерность $d^{-}(\Phi, M, y)$ набора лекал Φ — *максимальное количество узлов, гарантирующее существование интерполянты.*

верхняя размерность $d^{+}(\Phi, M, y)$ набора лекал Φ — *минимальное количество узлов, гарантирующее единственность интерполянты.*

Размерности наборов лекал

Определение

Пусть

P^k — *множество вещественных полиномов степени* k.

R^{k_p,k_q} — *множество отношений полинома степени* k_p *к полиному степени* k_q.

Примеры

Для любых отрезка $I \subset \mathbb{R}$ *и набора значений* y

$$d^-(\mathcal{P}^k, M, y) = d^+(\mathcal{P}^k, M, y) = k + 1,$$
$$d^-(\mathcal{R}^{k_p,k_q}, M, y) \leqslant d^+(\mathcal{R}^{k_p,k_q}, M, y) = k_p + k_q + 1,$$
$$d^-(\mathcal{P}^k \cup \mathcal{R}^{k_p-q,k_q}, M, y) = k + 1$$
$$d^+(\mathcal{P}^k \cup \mathcal{R}^{k_p-q,k_q}, M, y) = k + k_q.$$

Алгоритм S1

Данные

1. Метрические пространства $(\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}})$ и $(\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}})$.
2. Дискретное множество $X \subset \mathcal{X}$ и отображение $y : X \to \mathcal{Y}$.
3. Покрытие пространства $\mathcal{X}$ конечным множеством $\mathcal{M}$ замкнутых областей M со связными внутренностями, для которых

$$|M \cap X| > d^{-}(\Phi_M).$$

4. Процедура оценивания $B_\Phi(X_d, X_r, y, \varphi)$.
5. Процедура отбора интерполянт $\mathcal{C}_{B_\Phi}(\Phi_M, X_d, X_r, y)$.

Алгоритм S1

Назначение

Алгоритм приближённо восстанавливает неизвестное отображение

$$f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$$

по его значениям на X, определив для каждого $M_c \in \hat{\mathfrak{M}}$ элемент $\varphi \in \Phi_M$ наиболее подходящего лекала с $M \supset M_c$.

Построение

S1a For $(M_c \in \hat{\mathfrak{M}})$ // *для каждого минимального пересечения*

S1a1 $\{\lambda = -1;$ // *рекордное значение будет неотрицательно*

S1a2 $n_{M_c} = |X \cap M_c|;$ // *количество узлов интерполяции, центр ξ*

Алгоритм S1

S1a3 For (each $M \in \mathcal{M}$)

S1a3a $\{n_\pm = d^\pm(\Phi_M) + 1;$ // количество узлов для существования // или единственности интерполянты

S1a3b If $(n_{M_c} > n_+)$

Это неравенство означает, что интерполяция на M_c возможна не при любом y и поэтому в случае несуществования интерполянты алгоритм вернёт наилучшее приближение к интерполяции и вычисленную погрешность

S1a3b1 Then $\{\varphi_1 = \mathcal{C}_{B_\Phi}(\Phi_M, \varnothing, X \cap M_c, y);$

S1a3b2 $\lambda_1 = B_\Phi(\varnothing, X \cap M_c, y, \varphi_1);\}$

S1a3b3 Else $\{r_d$ — наименьший радиус замкнутой r-окрестности $M_c^r = \{x \in \mathcal{X} : \exists_{x' \in M_c} \quad \rho_{\mathcal{X}}(x, x') < r\}$ множества M_c которая содержит не менее n_- точек и $X_d = X \cap M_c^{r_d}$;

Алгоритм S1

S1a3b4 r_r — наибольший радиус M_c^r которая содержит не более n_+ точек и $X_d = X \cap M_c^{r_r} \setminus X_d$;

S1a3b5 $\varphi_1 = \mathcal{C}_{B_\Phi}(\Phi_M, X_d, X_r, y)$; $\lambda_1 = B_\Phi(X_d, X_r, y, \varphi_1)$;

S1a3b6 Следуя *принципу произведения расстояний* в области интерполяции X_d, и принципу минимума расстояний в X_r, рейтинг постановки

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\prod\limits_{x_i \in X_d} \rho_\chi(x_i, \xi)} \left(\max_{x_i \in X_r} \rho_\chi(x_i, \xi) \right)^{|X_r|} \tag{1}$$

S1a3b7 If $(\lambda_2 < \lambda$ либо $\lambda = -1)$ Then $\{\lambda = \lambda_2$ и $\varphi = \varphi_1\}\}\}$

S1a4 $f|_{M_c} = \varphi.\}$

Точное восстановление локальных интерполянт

Теорема

Пусть

1. $\mathcal{X} = \bigcup_{j\in J} M_j$ *разбито на замкнутые области* M_j *с непересекающимися внутренностями,*
2. *каждое* M_j *представляется конечным объединением множеств из* $\mathcal{M}$ *и содержит не менее* $d^+(\Phi_M)$ *узлов*
3. *на каждом* Φ_M *задана мера, по которой прообраз любого заданного значения в точке при фиксированных значениях в других* $d^+(\Phi_M) - 1$ *точках имеет меру 0.*

Тогда любое отображение $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$*, для которого* $f|M_j \in \Phi_{M_j}$ *при всех* $j \in J$*, почти всегда безошибочно точно восстанавливается по своим значениям в узлах интерполяции алгоритмом S1.*

Недостатки предельно общего подхода

1. Часто проблематичны базовые процедуры приложения и оценивания лекала.
2. Алгоритм не даёт непрерывной интерполянты.
3. Сам интерполяционный оператор тоже разрывен.

Недостатки предельно общего подхода

1. Часто проблематичны базовые процедуры приложения и оценивания лекала.
2. Алгоритм не даёт непрерывной интерполянты.
3. Сам интерполяционный оператор тоже разрывен.

Недостатки предельно общего подхода

1. Часто проблематичны базовые процедуры приложения и оценивания лекала.
2. Алгоритм не даёт непрерывной интерполянты.
3. Сам интерполяционный оператор тоже разрывен.

Недостатки предельно общего подхода

1. Часто проблематичны базовые процедуры приложения и оценивания лекала.
2. Алгоритм не даёт непрерывной интерполянты.
3. Сам интерполяционный оператор тоже разрывен.

Непрерывность оператора и обработка конфликтов

Непрерывность оператора интерполяции

Когда определены выпуклые комбинации функций класса интерполянт, их использование позволяет сделать оператор интерполяции непрерывным и наверное более точным. Комбинации вычисляются с весами, обратными погрешности.

Конфликты точного восстановления

Особая зона конфликта точных интерполянт выделяется заданием порогового значения погрешности, ниже которого интерполянты считаются примерно равноценными. Вычисленные погрешности перед вычислением весов увеличиваются на это значение, что исключает деление на ноль.

Оценка ошибки

Ошибка рациональной интерполянты

Интерполянта $\varphi \in \mathcal{R}^{k_p,k_q}(S)$ при $k_d \leqslant k_p - k_q$ имеет вид

$$\varphi(x) = p(x) + \frac{\omega(x)s(x)}{q(x)}, \tag{2}$$

где p интерполирующий по узлам X_d полином степени k_d,

$$\omega(x) = \prod_{x_i \in X_d} (x - x_i).$$

Используем оценку

$$B_{\mathcal{R}^{k-q,q}}(X_d, X_r, y, \varphi) = \sum_{x \in X_r} q^2(x)(\varphi(x) - y(x))^2. \tag{3}$$

Теорема

Пусть $k_d \leqslant k_p - k_q$. Тогда оптимальные коэффициенты полинома $s(x) = \sum_{j \in N_s} s_j x^j$ степени k_s и полинома $q(x) = \sum_{j \in N_q} q_j x^j$ степени k_q, нормированного $q_{k_q} = 1$, определяются системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in N_q} q_i \sum\limits_{x \in X_r} (p(x) - y(x))\omega(x) x^{i+j} \\ \qquad + \sum\limits_{i \in N_s} s_i \sum\limits_{x \in X_r} \omega^2(x) x^{i+j} = 0, & j \in N_s, \\ \sum\limits_{i \in N_q} q_i \sum\limits_{x \in X_r} (p(x) - y(x))^2 x^{i+j} \\ \qquad + \sum\limits_{i \in N_s} s_i \sum\limits_{x \in X_r} (p(x) - y(x))\omega(x) x^i = 0, & j \in N_q, \end{cases} \tag{4}$$

где $\omega(x) = \prod_{x_i \in X_d} (x - x_i)$.

Исходные данные

$\mathfrak{X} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок интерполяции;

$X = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\} \subset \mathfrak{X}$ — дискретное множество узлов, разбивающих $[a, b]$ на n отрезков $M_i = [x_{i-1}, x_i]$;

$y : X \to \mathbb{R}$ — заданные в узлах значения;

$m \in \mathbb{N}_0$ — требуемая гладкость интерполянты;

$k > 1$ — степень интерполяции;

$e_{rt} > 0$ — порог ошибки.

Назначение алгоритма

Алгоритм приближённо восстанавливает неизвестное отображение

$$f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}.$$

На каждом M_i в качестве интерполянты выбирается наиболее близкое к заданным значениям полином степени k либо непрерывная рациональная функция с числителем степени $k-1$ и линейным ($k_q = 1$) знаменателем вида $x - c$ так, чтобы обеспечить

1. совпадение значений в узлах с заданными и стыковку гладкости m если $m > 0$.
2. точное локальное восстановление на выпуклой оболочке любых $k+2$ узлов любой непрерывной функции класса интерполянт при естественном условии отсутствия практически невероятной несовместности таких восстановлений.

При вычислении значения в узле используются значения в этом и не более чем в $k+1$ ближайших узлах с каждой стороны.
Локальные вычисления по коротким формулам, опирающимися на разделённые разности, не нуждаются в арифметике повышенной точности

Вычисление разделённых разностей

Интерполяция Ньютона

$$p_{i,i}(x) \equiv y(x_j), \qquad p_{i,j+1}(x) = p_{i,j}(x) + P_{i,j+1}\omega_{i,j}(x), \qquad i < j$$

использует разделённые разности $P_{i,j}$ *и функцию* $\omega_{i,j}(x) = \prod_{l=i}^{j}(x - x_l)$.

S2a For $(i = 0, \ldots, n)$ $\{P_{i,0} = y_i$

S2a2 For $(j = 1, \ldots, \min(k+1, n-i-1))$ $\{P_{i,j} = \dfrac{P_{i,j-1} - P_{i+1,j-1}}{x_i - x_{i+j}}\}\}$

Вычисление производных в узлах

S2b For $(i = 0, \ldots, n)$ *// номер узла, где вычисляются производные*

S2b1 $\{S_l = 0;$ *// накапливаемая сумма с весами*

S2b2 $W_l = 0;$ *// накапливаемая сумма самих весов*

S2b3 $n_l = 0;$ *// количество слагаемых*

Производные полиномов Ньютона в узлах

S2b4 For $(\nu = 0, \ldots, m)$ $\{$ *// порядок производной*

S2b4b For $(j_1 = \max(0, i-k), \ldots, \min(n, i+k))$ *// номер левейшего узла*

S2b4b1 $\{$If $(\nu == 0)$ Then $\{P^{(0)}_{j_1,j_1}(x_i) = y(x_j)\}$ Else $\{P^{(\nu)}_{j_1,j_1}(x_i) = 0\}$

S2b4b2 For $(j_2 = j_1 + 1, \ldots, \min(n, j_1 + k))$ *// номер правейшего узла*

S2b4b2a $\{p^{(\nu)}_{j_1,j_2}(x_i) = p^{(\nu)}_{j_1,j_2-1}(x_i) + P_{j_1,j_2}\omega^{(\nu)}_{j_1,j_2-1}(x_i)\}\}$

Наборы подряд идущих узлов

S2b5 For $(j = \max(0, i-k-1), \ldots, \min(n-k-1, i-k-1))$

S2b5a $\{$If $(|x_j - x_i| == |\xi - x_i|)$ Then $\{k_d = k - 1\}$ Else $\{k_d = k\}$

S2b5b If $(|x_j - x_i| < |\xi - x_i|)$ Then $\{j_d = j,\ j_r = j + k + 1;\}$

S2b5b2 Else $\{j_d = j + 1,\ j_r = j\}$

S2b5c $\xi = x_{j_r};$

S2b5d

Полиномиальная интерполянта $p(x) + s(x)\omega$, $k_q = 0$

If $(k == k_d)$ Then $\{s_0 = 0;\ e_{rr} = (y(\xi) - p_{j_d, j_d+k}(\xi))^2\}$

S2b5d2

Else { // (4) принимает вид $\begin{cases} A_0 s_0 + B_0 s_1 = C_0 \\ A_1 s_0 + B_1 s_1 = C_1 \end{cases}$, где

S2b5d3

$$A_0 = \omega^2(x_j) + \omega^2(\xi), \qquad B_0 = \omega^2(x_j)x_j + \omega^2(\xi)\xi,$$
$$A_1 = \omega^2(x_j)x_j + \omega^2(\xi)\xi, \quad B_1 = \omega^2(x_j)x_j^2 + \omega^2(\xi)\xi^2,$$
$$C_0 = (y(x_j) - p(x_j))\omega^2(x_j) + (y(\xi) - p(\xi)\omega^2(\xi),$$
$$C_1 = (y(x_j) - p(x_j))\omega^2(x_j)x_j + (y(\xi) - p(\xi)\omega^2(\xi)\xi,$$

S2b5d4

$$s_0 = \frac{B_1 C_0 - B_0 C_1}{A_0 B_1 - A_1 B_0}, \qquad s_1 = \frac{A_1 C_0 - A_0 C_1}{A_0 B_1 - A_1 B_0};$$

S2b5d5

$$e_{rr} = (y(x_j) - p(x_j) - \omega_{j+1,j+k}(x_j)(s_1 x_j + s_0))^2 + (y(\xi) - p(\xi) - \omega_{j+1,j+k}(\xi)(s_1\xi + s_0))^2\}$$

S2b5e

$w = (e_{rr} + e_{rt})^{-\frac{1}{2}}$ // вес этого положения лекала

S2b5f For $(\nu = 0, \ldots, m)$ // производные усредняются с весом w

S2b5f1 $\{W_l := W_l + w;\ n_l := n_1 + 1;$ //

S2b5f2 If $(k == k_d)$ Then $\{S_l \mathrel{+}= p^{(\nu)}_{j_d, j_d+k}(x_i)\}$

S2b5f2b Else $\{S_l \mathrel{+}= S_l + p^{(\nu)}_{j+1,j+k}(x_i) + (s_0 + s_1 x_i)\omega^{(\nu)}_{j+1,j+k}(x_i) + s_1 \omega^{(\nu-1)}_{j+1,j+k}(x_i);\}\}$

Рациональная интерполянта $p(x) + s_0 \frac{\omega(x)}{x-c}$, $k_q = 1$, $q_0 = -c$

S2b5g If $(k == k_d)$ Then $\{$ // из $p_{j_d+1,j_d+k}(x) + \frac{s_0 \omega_{j_d+1,j_d+k}(x)}{x-c} = y(x)$, $x \in \{x_{j_d}, \xi\}$

S2b5g2 // также записывается в виде $\begin{cases} \omega_j s_0 + \delta_j c = x_j \delta_j \\ \omega' s_0 + \delta' c = x_{j+k} \delta' \end{cases}$, где

S2b5g3
$$\omega_j = \omega_{j_d+1,j_d+k}(x_j), \qquad \delta_j = y(x_j) - p_{j_d+1,j_d+k}(x_j),$$
$$\omega' = \omega_{j_d+1,j_d+k}(x_{j+k}), \qquad \delta' = y(x_{j+k}) - p_{j_d+1,j_d+k}(x_{j+k}),$$

S2b5g4
$$s_0 = \frac{\delta' x_j \delta_j - \delta_j x_{j+k} \delta'}{\omega_j \delta' - \omega' \delta_j}, \qquad c = \frac{\omega' x_j \delta_j -_j x_{j+k} \delta'}{\omega_j \delta' - \omega' \delta_j};$$