ТИПИЧНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И ОСОБЕННОСТИ ВЫГОДЫ В МОДЕЛИ АРНОЛЬДА

А.А.Давыдов* и Е. Мена Матош**

Аннотация. На окружности для гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды изучены типичные переходы между оптимальными вращением и стационарной стратегией в задаче максимизации средней временной выгоды на бесконечном горизонте. Показано, что имеется только два вида таких переходов, найдены соответствующие им особенности средней выгоды как функции параметра семейства и доказана устойчивость этих особенностей к малому шевелению типичного семейства. Завершена классификация особенностей максимальной средней выгоды для типичных семейств.

1. Введение

На гладком (т.е. класса C^∞) многообразии *управляемая система* задается гладким автономным векторным полем, гладко зависящим от управляющего параметра. Предполагается, что этот параметр пробегает гладкое компактное многообразие U (или объединение таковых) с не менее чем двумя различными точками.

Допустимым движением системы называется абсолютно непрерывное отображение $x : t \mapsto x(t)$ отрезка временной оси в фазовое пространство, в точках дифференцируемости которого скорость движения лежит в выпуклой оболочке множества допустимых скоростей системы. Учитывая автономность поля скоростей системы, момент начала движения можно считать нулевым без нарушения общности рассуждений.

При наличии на фазовом пространстве системы гладкой или непрерывной плотности выгоды f допустимое движение системы на отрезке времени $[0, T], T > 0$, обеспечивает *выгоду*

$$P(T) = \int_0^T f(x(t))dt$$

*При частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 03-01-00140 и FCT XXI/BBC/22225/99.

**При частичной поддержке Математического центра университета г.Порто финансируемого FCT.

и *среднюю выгоду* $A(T) = P(T)/T$. При компактном фазовом пространстве любое допустимое движение может быть продолжено на всю временную ось (в некомпактном случае это не всегда так, как, например, для решений уравнения $\dot{x} = x^2$ на вещественной оси).

Поиск допустимого движения, обеспечивающего наибольшую среднюю выгоду на бесконечном горизонте – одна из важных задач теории управления (при отсутствии предела у величины $A(T)$ при $T \to \infty$ берется ее верхний предел). В частности, эта задача включает оптимизацию циклических процессов, когда фазовое пространство является окружностью. К анализу средней выгоды таких процессов сводится изучение периодических явлений различной природы, поэтому эта задача не нова и изучалась ранее различными методами [13], [16], [17].

В.И.Арнольд предложил новый подход к анализу таких задач, основанный на достижениях теории особенностей [1], [2], [3]. В частности, он показал, что для гладких управляемых систем на окружности среди движений с наибольшей средней выгодой могут наблюдаться *циклы уровня* - допустимые движения, использующие максимальную и минимальную скорости на участках, где плотность выгоды не превосходит и больше наибольшей средней выгоды на бесконечном горизонте, соответственно, и *стационарные стратегии* (=*точки покоя*), в каждой из которых система находится, используя нулевую допустимую скорость. В.И.Арнольд также изучил некоторые из типичных особенностей наибольшей средней выгоды как функции параметра в случае, когда пара из управляемой системы и плотности выгоды зависит дополнительно от одномерного параметра [2].

В настоящей работе продолжен анализ однопараметрической модели Арнольда. Доказано, что стратегия, доставляющая наибольшую среднюю выгоду, всегда может быть найдена среди этих двух типов движений. Однако наше понятие точки покоя шире. К таковым мы относим любую точку фазового пространства, в которой нулевая скорость лежит в выпуклой оболочке допустимых скоростей этой точки.

Мы также изучили типичные переходы между оптимальными вращением и остановкой при изменении одномерного параметра и показали, что имеется ровно два типа таких переходов. Доказали их устойчивость к малому шевелению типичной пары и нашли соответствующие им особенности наибольшей средней выгоды.

Полученные в работе результаты остаются справедливыми и для типичного семейства управляемых систем (плотностей выгоды) при фиксированном типичном семействе плотностей выгоды (управляемых систем, соответственно). Формулировка и доказательство этого утверждения такие же как и в [11].

Первый автор выражает благодарность сотрудникам кафедры прикладной математики и Математического центра университета г. Порто, при посещении которых и была частично написана эта работа, за хорошие научную атмосферу и условия работы.

2. Определения и теоремы

Здесь сформулированы основные результаты работы. Фазовая переменная обозначается через x, а параметр - через p. Под *типичным* объектом (= семейством управляемых систем или плотностей выгоды, парой (управляемая система, плотность выгоды), ...) мы понимаем точку из открытого всюду плотного множества в пространстве объектов в тонкой гладкой или достаточно гладкой топологии. Некоторое свойство или утверждение справедливо в случае *общего положения*, если оно верно для типичного объекта.

2.1. **Оптимальные движения.** Допустимое движение называется *оптимальным*, если оно обеспечивает наибольшую среднюю выгоду на бесконечном горизонте, которую мы будем называть *наибольшей средней выгодой* или *наилучшей средней выгодой*, когда она рассматривается для определенного вида стратегий, например, точек покоя.

Для значения c плотности выгоды *движение c-уровня* – это движение, использующее минимальную и максимальную допустимые скорости на участках, где плотность выгоды больше и не превосходит c, соответственно. Это значение называется *циклическим*, если движение уровня для достаточно близких значений доставляет вращение на окружности – *цикл c-уровня* (или просто *цикл уровня*). *Периодом* цикла уровня будем называть его наименьший период.

Для управляемых систем с положительными скоростями максимальная средняя выгода A доставляется циклом A-уровня. При таком движении, обнаружив этот цикл, система начинает периодическое движение по нему, получая за период среднюю выгоду равную наибольшей на бесконечном горизонте. Действительно, как показано [2], для таких систем оптимальное движение использует минимальную скорость, где плотность выгоды больше наибольшей средней выгоды A, и максимальную, где меньше. При этом движение на самом этом уровне не влияет на среднюю выгоду [10], поэтому его можно взять как на цикле уровня A.

Как мы отметили выше, *точкой покоя* называется любая точка фазового пространства, где выпуклая оболочка множества допустимых скоростей содержит нулевую скорость. Такая точка стационарна в том смысле, что для непрерывной управляемой системы с одномерным фазовым пространством существует кусочно непрерывное управление и соответсвующее ему допустимое движение вблизи этой точки, имеющее эту точку своим пределом на бесконечности. Очевидно, что такое движение обеспечивает среднюю выгоду на бесконечном горизонте, равную значению плотности выгоды в этой точке, то есть выгоду, доставляемую простым пребыванием в самой точке. Наше определение допустимого движения допускает такое пребывание (= стационарную стратегию).

Теорема 2.1. *Для непрерывных управляемой системы и плотности выгоды на окружности максимальная средняя выгода (на бесконечном горизонте) всегда может быть обеспечена либо некоторым циклом уровня либо подходящей стационарной стратегией.*

Эта теорема доказана в параграфе 3.

Отметим, что может существовать бесконечное число различных оптимальных допустимых движений. Например, изменение такого движения на конечном промежутке времени сохраняет его оптимальность. Если к тому же существуют и оптимальная стационарная стратегия и оптимальное (циклическое) движение уровня, что, вообще говоря, возможно, то "смешанное"движение, при котором движение уровня делает остановки любой продолжительности в соответствующей точке покоя, также является оптимальным.

Наибольшая средняя выгода зависит от параметра, если или управляемая система или плотность выгоды зависит от него, и как функция параметра может иметь особенности, например, стать недифференцируемой или даже разрывной при гладких семействах управляемых систем или плотностей выгоды [2]. Теорема 2.1 позволяет проанализировать эти особенности, разделив их на три группы: особенности выгоды для оптимальных циклов уровня, для оптимальных стационарных стратегий и для переходов между этими двумя видами оптимальных движений. Результаты этого анализа изложены в следующих трех пунктах, соответственно.

2.2. **Особенности выгоды для оптимальных циклов уровня.**

Теорема 2.2. ([11]) *На окружности для типичного однопараметрического семейства пар плотностей выгоды и управляемых систем с положительными скоростями росток наибольшей средней выгоды A в любом значении параметра есть росток в нуле одной из семи функций второго столбца Таблицы 1 с точностью до эквивалентности, указанной в третьем столбце, и при условиях из четвертого столбца. Более того, эта выгода для типичного семейства пар и для любого достаточно близкого к нему переводятся одна в другую гладкой Γ-эквивалентностью близкой к тождественной.*

Таблица 1.

№	*Особенность*	*Эк.*	*Условия*
1	0	R^+	$\#U \geq 2$
2	$(\lvert p\rvert^{3/2}+p^2)(1+\operatorname{sign} p)$	Γ_a	$\#U \geq 2$, *проход A через локальный минимум плотности выгоды*
3	$(\lvert p\rvert^{3/2}-p^2)(1+\operatorname{sign} p)$	Γ_a	$\#U \geq 2$, *проход A через локальный максимум плотности выгоды*
4	$\lvert p\rvert^{3/2}(1+\operatorname{sign} p)$	Γ	$\#U \geq 2$, *проход через двойную точку с касанием используемой скорости*
5	$p\lvert p\rvert$	R^+	$\#U \geq 3$, *проход через тройную точку с касанием используемой скорости*
6	$\lvert p\rvert^3$	R^+	$\#U \geq 2$, *переключение скоростей в двойной точке*
7	$\lvert p\rvert^{7/2}(1+\operatorname{sign} p)$	Γ	$\dim U > 0$, *проход через точку сборки у используемой скорости*

Поясним утверждение этой теоремы. Г-эквивалентность разрешает диффеоморфизмы пространства графика функции, сохраняющие естественное расслоение этого пространства над областью определения функции. Ее частный случай -R^+-эквивалентность, - допускает диффеоморфизм пространства определения функции и прибавление гладкой функции.

Максимальная (минимальная) скорость семейства управляемых систем на окружности - это максимум (минимум, соответственно) допустимых скоростей этого семейства по управляющему параметру. В случае общего положения при одномерном параметре семейства максимальная скорость вблизи каждой точки либо гладка либо имеет одну из трех типичных особенностей как у функций

$$1)\,|u|,\quad 2)\,\max\{v,|u|\},\quad 3)\,\max\{-w^4+uw^2+vw \mid w\in R\} \qquad (2.1)$$

в нуле с точностью до R^+-эквивалентности (для минимальной скорости нужно изменить знак у этих функций) [4], [6], [7]. Здесь u, v - гладкие локальные координаты в пространстве фазовой переменной и параметра. Заметим, что эти особенности не доставляют нормальные формы самих скоростей как векторных полей. Точку с особенностями 1) - 3) мы будем называть *двойной, тройной* и *точкой сборки*, соответственно. Из теорем трансверсальности следует, что при одномерном параметре в типичном случае замыкание множества точек, где максимальная или минимальная скорость имеют такие особенности (=*множество Максвелла*) или пусто или есть

– гладкая кривая при числе $\#U$ различных значений управляющего параметра равном 2,

– гладкая кривая с тройными точками при $\#U = 3$, причем тройные точки для максимальной и минимальной скоростей одни и те же, а множество Максвелла вблизи них есть пересечение трех гладких кривых под ненулевыми углами, или еще

– гладкая кривая с тройными точками при $3 < \#U < \infty$ и дополнительно с точками сборки при $\dim U > 0$, различными для минимальной и максимальной скоростей, а также с трансверсальными самопересечениями вне этих точек.

Более того, множества Максвелла типичного семейства систем и любого достаточно близкого к нему переводятся одно в другое гладким диффеоморфизмом близким к тождественному (см. [4], [6], [7], [9]). Следовательно, в случае общего положения это множество размещено типично по отношению к слоям естественного расслоения τ объемлющего пространства над пространством параметра семейства. Следовательно, множество Максвелла типичного семейства управляемых систем может касаться слоев этого расслоения только в точках своей гладкости и с первым порядком касания. Кроме того, в каждом слое этого расслоения может быть не более одной точки такого касания (=*двойной с касанием*, остальные точки гладкости множества Максвелла называются *регулярными*), либо тройной точки, либо точки сборки, либо еще точки самопересечения этого множества.

Наконец, в Таблице 1

– обозначение Γ_a используется для Г-эквивалентности афинной вдоль оси выгоды;

– условие прохода через локальный экстремум плотности выгоды означает совпадение выгоды A с локальным экстремумом этой плотности при соответствующем значении параметра;

– условие прохода через двойную точку с касанием, тройную точку или точку сборки - это использование при соответствующем значении параметра на некотором участке скорости, имеющей на этом участке указанную в условии особенность;

– условие переключения в двойной точке - это переключение между максимальной и минимальной скоростями в регулярной точке множества Максвелла.

Обозначим через $T, T = T(c)$, и $P, P = P(c)$, функции периода цикла уровня c и выгоды вдоль него, соответственно. Доказательство теоремы 2.2 существенно использует следующее утверждение.

Теорема 2.3. ([11]) *Для дифференцируемой плотности выгоды с конечным числом критических точек и непрерывной управляемой системы с положительными скоростями, минимум и максимум* *из которых равны лишь в отдельных точках, уровень c цикла, доставляющего наибольшую среднюю выгоду, является единственным решением уравнения*

$$c - P(c)/T(c) = 0. \tag{2.2}$$

Более того, левая часть этого уравнения является дифференцируемой функция вблизи этого уровня.

2.3. **Особенности выгоды для оптимальных стационарных стратегий.** *Стационарная область* управляемой системы – это объединение S всех ее точек покоя. Для непрерывных систем эта область замкнута. Наилучшая средняя выгода A_s для стационарных стратегий является решением следующей экстремальной задачи $A_s(p) = \max\{f(x,p) \,|\, x \in S_p\}$, где $S_p = \{x \,|\, (x,p) \in S\}$.

Таким образом, для классификации типичных особенностей выгоды A_s можно сначала изучить типичные особенности стационарной области и доказать их устойчивость к малому шевелению типичного семейства систем, а затем проанализировать типичные особенности решения этой экстремальной задачи.

Теорема 2.4. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства управляемых систем на окружности росток стационарной области в каждой точке ее границы есть росток в нуле одного из семи множеств Таблицы 2 в подходящей системе гладких локальных координат, расслоенной над параметром. Более того,*

• *число различных значений управляющего параметра не меньше двух для особенностей 1 и 2, не меньше 3 для особенностей 3, 4 и равно 2 для особенности 5,*

• *стационарные области типичного семейства управляемых систем и любого достаточно близкого к нему переводятся одна в другою близким к тождественному C^∞-диффеоморфизмом, сохраняющим естественное расслоение пространства над параметром.*

Таблица 2.

1	$2_\pm$	3	4	$5_\pm$
$x \le 0$	$p \ge \pm x^2$	$p \le \|x\|$	$x \ge -\|p\|$	$\pm(p^2 - x^2) \le 0$

Мы не приводим доказательство этой теоремы. Оно основано на использовании теорем трансверсальности и достаточно просто.

Замечание 1. В типичном случае максимальная и минимальная допустимые скорости имеют разные знаки внутри стационарной области, а на ее границе хотя бы одна из них нулевая. Кроме того вне особенностей типа $2_\pm$ зануляющаяся скорость всегда имеет односторонние ненулевые производные. В случае полидинамических систем, когда число значений управляющего параметра конечно, утверждение теоремы 2.4 было доказано Селией Морейра [8].

Теорема 2.5. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности и любого значения управляющего параметра, допускающего стационарные стратегии, росток выгоды A_s в этом значении есть росток в нуле одной из пяти функций второй строки Таблицы 3 с точностью до эквивалентности из третьей строки. Кроме того графики таких выгод для типичной пары и любой достаточно близкой к ней переводятся один в другой гладкой близкой к тождественной* Γ*-эквивалентностью.*

Таблица 3.

Type	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Singularity	0	$\lvert p \rvert$	$p\lvert p \rvert$	$\sqrt{p}, p \geq 0$	$\max\left\{0, 1+\sqrt{p}\right\}$
Equivalence	R^+	R^+	R^+	R^+	Γ

Теорема 2.5 доказана в параграфе 4.

Замечание 2. В типичном случае особенность 1 из Таблицы 3 наблюдается, когда выгода A_s достигается только в одной точке покоя – либо невырожденном максимуме плотности выгоды внутри стационарной области либо точке ее границы с особенностью типа 1 из теоремы 2.4 и с $f_x \neq 0$. Особенности 2 соответствует либо типичная конкуренция двух стратегий с особенностью 1 из Таблицы 3 либо появление особенности 4 либо 5_- стационарной области из теоремы 2.4 как (единственной) оптимальной стратегии (при этом $f_x \neq 0$). Особенность 3 определяется типичным выходом (единственной) оптимальной стационарной стратегии на границу области S; в типичном случае это происходит в точке границы с особенностью типа 1 из теоремы 2.4 и при $f_x = 0 \neq f_{xx}$ в точке выхода. Наконец, особенность 4 появляется в случае, когда (единственная) оптимальная стратегия – это граничная точка стационарной области с особенностью типа 2_+ из теоремы 2.4 (при этом $f_x \neq 0$ в этой точке) и локально вблизи соответствующего значения параметра по одну сторону от него нет стационарных стратегий; напротив, особенность 5 наблюдается в такой ситуации, когда такие стратегии есть с обеих сторон. Все особенности из Таблицы 3 хорошо известны в теории параметрической оптимизации [6], [9], [12], [14]. В случае средней временной оптимизации они были открыты В.И.Арнольдом как типичные особенности наибольшей выгоды для стационарных стратегий и циклов уровня [2]. Здесь все они наблюдаются как типичные особенности этой выгоды исключительно для стационарных стратегий и имеют устойчивые реализации уже в случае семейств бидинамических (полидинамических) систем, изученном Селией Морейра [8], использовавшей тоже понятие точки покоя, что и в настоящей работе.

2.4. **Переходы между типами оптимальных стратегий.** Значение параметра семейств называется *переходным,* если в любой его окрестности максимальная средняя выгода не может быть обеспечена только одним типом стратегий, а именно, либо циклами уровня либо точками покоя.

Теорема 2.6. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности росток максимальной средней выгоды в любом переходном значении параметра R^+-эквивалентен ростоку в нуле одной из двух функций второго столбца Таблицы 4. Кроме того множества переходных значений параметра для типичной пары и любой достаточно близкой к ней переводятся одно в другое близким к тождественному C^∞-диффеоморфизмом с сохранением типа особенностей выгоды в этих значениях.*

Таблица 4.

No	Особенность	Тип
1	$\|p\|$	Остановка во внутренней точке стационарной области, $f_x(.) = 0$
2	$\max\left\{0, \frac{p}{\|\ln p\|}(1+H)\right\}$	Остановка в граничной точке стационарной области с особенностью 1 из Таблицы 2, $f_x(.) \neq 0$

Замечание 3. В этой таблице $H = h(p, \frac{p}{|\ln p|}, \frac{\ln|\ln p|}{|\ln p|})$, где h - гладкая функция, $h(p,0,0) \equiv 0$. Первая особенность определяется невырожденной конкуренцией локального максимума плотности выгоды внутри стационарной области, доставляющего выгоду A_s, с наибольшей средней выгодой вдоль циклов уровня; вторая - приходом точки переключения между максимальными и минимальными скоростями на оптимальном цикле уровня на границу стационарной области при изменении параметра.

Теорема 2.6 доказана в параграфе 5.

3. Избранные стратегии: доказательство теоремы 2.1

Сначала докажем несколько полезных утверждений.

Предложение 3.1. *Если допустимое движение дифференцируемой управляемой системы входит в точку или выходит из нее за конечное время, то максимальная скорость в направлении этого движения в этой точке положительна.*

Доказательство. Понятно, что в такой точке максимальная скорость в направлении входа или выхода из точки неотрицательна в силу непрерывности этой скорости. Но максимальная (минимальная) скорость V дифференцируемой управляемой системы является липшицевой функцией, если множество значений управляющего параметра - замкнутое гладкое многообразие или дизъюнктное объединение таковых. Таким образом, если V зануляется в некоторой точке x_0, то вблизи этой точки $|V(x) - V(x_0)| \leq C|x - x_0|$ с некоторой положительной константой C. Следовательно, войти или выйти из этой точки за конечное время система не может, ибо функция $1/x$ имеет неинтегрируемую особенность в нуле. Это противоречит условию. Следовательно, в наших предположениях значение $V(x_0)$ должно быть положительным. □

Предложение 3.2. *Если допустимое движение $x(t)$, $0 \leq t < \infty$, непрерывной управляемой системы обеспечивает среднюю выгоду A на бесконечном горизонте и участок его траектории между точками $x(t_1)$, $x(t_2)$ с $f(x(t)) < A$ ($f(x(t)) > A$) для всех $t \in [t_1, t_2]$ может быть пройден быстрее (медленнее, соответственно), то средняя выгода для движения с более быстрым (медленным, соответственно) прохождением этого участка обеспечивает не меньшую среднюю выгоду на бесконечном горизонте.*

Доказательство. Мы проведем его только в случае более быстрого прохода. Анализ другого случая аналогичен. Наши рассуждения аналогичны проведенным в [11] в схожей ситуации. Без нарушения общности можно считать плотность выгоды положительной, ибо добавление к ней любой константы увеличивает среднюю выгоду на саму эту константу, что нетрудно видеть.

Обозначим $C = \max\{f(x(t)),\ t \in [t_1, t_2]\}$. По определению средней выгоды на бесконечном горизонте существует последовательность времен $T_i \to \infty$ таких, что $A(T_i) \to A$ при $i \to \infty$. Возьмем i столь большим, что $T_i > t_2$ and $A(T_i) > C$. Обозначим через Δ, $0 < \Delta < T$, экономию времени при более быстром прохождении участка между $x(t_1)$ и $x(t_2)$. Вычисляя разницу D между средними выгодами исходного движения на промежутке $[0, T_i]$ и измененного движения на промежутке $[0, T_i - \Delta]$, получаем

$$D \leq A(T_i) - \frac{T_i A(T_i) - C\Delta}{T_i - \Delta} = \frac{\Delta}{T_i - \Delta}(C - A(T_i)) < 0.$$

Следовательно, движение с более быстрым прохождением участка между $x(t_1)$ и $x(t_2)$ обеспечивает не меньшую среднюю выгоду на бесконечном горизонте, чем исходное движение. □

Докажем теперь теорему 2.1. Пусть f и A – плотность выгоды и максимальная средняя выгода на бесконечном горизонте, соответственно. Если область $\{x : f(x) \geq A\}$ содержит точки покоя, то выгода A обеспечивается одной из них, что нетрудно видеть.

Если точек покоя в этой области нет, то при достаточно малом $\epsilon > 0$ их также нет и в области $D = \{x : f(x) \geq A - \epsilon\}$ в силу непрерывности плотности выгоды, максимальной и минимальной скоростей. В частности, в области D эти скорости одного знака и отделены от нуля. Следовательно, любое допустимое движение на связной компоненте этой области покидает эту компоненту за конечное время и может вернуться на нее лишь после оборота вокруг окружности.

Отсюда следует, что число оборотов вокруг окружности допустимого движения $x(t)$, доставляющего выгоду A, должно стремиться к бесконечности, когда само время уходит на бесконечность. Действительно, в противном случае это движение будет находиться в области D лишь конечное время и бесконечное в дополнении к ней, но тогда средняя выгода вдоль него не превысит $A - \epsilon$ - ограничения сверху значений плотности выгоды в этом дополнении, - что противоречит оптимальности этого движения.

Движение $x(t)$ улучшаемо при каждом его обороте в соответствии с предложением 3.2, ибо в силу наличия у него вращения максимальная допустимая скорость в направлении вращения всюду положительна в силу предложения 3.1. В частности, она отделена от нуля в силу своей непрерывности и компактности окружности. Цикл уровня A использует эту скорость на множестве $f(x) \leq A$. На оставшейся части окружности ($= \{f(x) > A\}$) улучшенное движение использует минимальную скорость, которая на этой части также отделена от нуля в силу положительности максимальной скорости и отсутствия точек покоя в замыкании этой части.

Таким образом, улучшенное движение - цикл уровня A. Средняя выгода на бесконечном горизонте вдоль него не меньше чем вдоль исходного движения, то есть не меньше A, но и больше она быть не может в силу оптимальности исходного движения.

Теорема 2.1 доказана. □

4. Доказательство теоремы 2.5

Точку границы области покоя будем называть *регулярной* либо *особой*, если в этой точке эта область имеет особенность 1 и любую другую особенность из теоремы 2.4, соответственно. Полезно следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Для типичного однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности*

(a) *в любой точке по меньшей мере хотя бы одна из производных f_x, f_{xx} и f_{xxx} семейства плотностей выгоды отлична от нуля,*

(b) *в любой особой точке границы области покоя отлична от нуля производная f_x, а в любой регулярной - хотя бы одна из производных f_x и f_{xx},*

(c) *при любом значении параметра семейства наилучшая средняя выгода среди стационарных стратегий может достигаться не более, чем в двух различных точках.*

Доказательства этих утверждения мы не приводим, поскольку они легко следуют из теоремы трансверсальности Тома в случаях **(a)** и **(b)** мультиструйной теоремы трансверсальности в случае **(c)**.

Докажем теорему 2.5. Пусть сперва для значения p_0 параметра выгода $A_s(p_0)$ достигается в единственной точке покоя $Q = (x_0, p_0)$.

Если Q - внутренняя точка области покоя, то, очевидно, $f_x(Q) = 0$, а из утверждения **(a)** предложения 4.1 следует, что в типичном случае $f_{xx}(Q) < 0$, поскольку Q - точка локального максимума плотности выгоды $f(., p_0)$. Следовательно, для значений p вблизи p_0 верно $A_s(p) = f(x(p), p)$, где $x = x(p)$ кривая локальных максимумов плотностей $f(\cdot, p)$ вблизи точки Q, а именно - решение уравнения $f_x = 0$ вблизи нее. В силу $f_{xx}(Q) < 0$ это решение существует, единственно и гладко по теореме о неявной функции. Таким образом, выгода A_s - гладкая функция вблизи точки p_0 и, значит, в этой точке она имеет первую особенность из Таблицы 3.

Если Q - регулярная граничная точка области покоя, то производная $f_x(Q)$ либо равна нулю либо нет. Понятно, что во втором случае вблизи точки p_0 функция A_s совпадает с ограничением семейства плотностей выгоды на границу области покоя вблизи точки Q, и, следовательно, она гладкая вблизи p_0. Таким образом, как и выше мы получаем первую особенность из Таблицы 3.

В первом же случае при $f_x(Q) = 0$ имеем $f_{xx}(Q) < 0$ в силу утверждения **(b)** предложения 4.1 и того факта, что Q - точка локального максимума функции $f(., p_0)$. Далее, в силу теоремы трансверсальности Тома в случае общего положения дифференциал ограничения производной f_x на границу области покоя не вырождается в точке Q. Следовательно, в этой точке эта граница не касается кривой локальных максимумов по x семейства плотностей выгоды. В частности, вблизи точки Q эта кривая и область покоя принимают соответственно вид кривой $x = p$ и множества $x \leq 0$ вблизи нуля после подходящего выбора гладких локальных координат расслоенных над параметром. В таких координатах семейство плотностей выгоды можно представить вблизи нуля $((= (0,0) = Q)$ в виде $f(x,p) = f(p,p) + (x-p)^2 h(x,p)$ с некоторой гладкой функцией h в силу леммы Адамара; $h_{xx}(0,0) < 0$ в силу $f_{xx}(0,0) < 0$. Теперь нетрудно видеть, что вблизи нуля выгода A_s есть максимум из ограничений этого семейства на границу $x = 0$ области покоя и на часть кривой $x = p$ его локальных максимумов по x, лежащую в этой области. Следовательно, вблизи p_0 эта выгода равна

$f(p,p)+p^2h(p,p)$ при $p\geq 0$ и $f(p,p)$ при $p\leq 0$ и, следовательно, имеет третью особенность из Таблицы 3 в точке p_0.

Если Q - особая граничная точка области покоя, то $f_x(Q)\neq 0$ в силу утверждения **(b)** предложения 4.1. Следовательно, в этой точке область покоя может иметь лишь одну из особенностей 2_+, 4 или 5_- из теоремы 2.4, ибо при других особенностях, 2_- и 5_+, точка Q является внутренней точкой сечения S_{p_0} и не может доставлять наибольшей средней выгоды в силу $f_x(Q)\neq 0$. При особенностях 4 и 5_- области покоя в этой точке выгода A_s имеет в точке p_0 вторую особенность из Таблицы 3, что нетрудно видеть, а при особенности 2_+ тип особенности этой выгоды в точке p_0 зависит от наличия в сечении S_{p_0} других точек покоя.

Выгода A_s имеет в точке p_0 четвертую особенность из Таблицы 2, если других точек покоя в сечении S_{p_0} нет. При наличии таких точек каждая из них в случае общего положения будет либо внутренней точкой области покоя либо регулярной точкой ее границы. При этом в обоих случаях значение плотности выгоды в ней будет меньше $A_s(p_0)$, а во втором случае к тому же производная f_x будет ненулевой. Все это следует из мультиструйной теоремы трансверсальности. Отсюда получаем, что в такой ситуации выгода A_s имеет в точке p_0 пятую особенность из Таблицы 3.

Для завершения доказательства нам осталось проанализировать случай, когда выгода $A_s(p_0)$ достигается в двух различных точках покоя. Как и выше, в силу мультиструйной теоремы трансверсальности каждая из них в случае общего положения является либо внутренней точкой области покоя с $f_x=0<f_{xx}$) либо регулярной точкой ее границы с $f_x\neq 0$. Следовательно, средние выгоды, обеспечиваемые лучшими стационарными стратегиями вблизи каждой из этих точек, будут гладкими функциями параметра вблизи точки p_0. Однако в силу этой же теоремы производные этих двух выгод в точке p_0 различны в случае общего положения. Сама выгода A_s вблизи точки этой точки есть максимум из этих двух выгод, и, следовательно, в точке p_0 имеет вторую особенность из Таблицы 3.

Нетрудно видеть, что для типичной пары особенности Таблицы 3 определяются трансверсальностью струйных или мультиструйных расширений пары к подмногообразиям в пространстве струй или мультиструй пар, соответственно. Отсюда следует устойчивость особенностей выгоды A_s типичной пары к ее малому шевелению, что влечет последнее утверждение теоремы 2.5. $\square$

5. Смена типа стратегий: доказательство теоремы 2.6

Сперва мы докажем несколько полезных утверждений, а затем изучим типичные смены типа стратегий.

5.1. **Циклические и переходные значения параметра.**

Предложение 5.1. *Для циклического уровня c_0 плотности выгоды при значении p_0 параметра достаточно близкие уровни этой плотности при достаточно близких значениях параметра также циклические, если семейство пар управляемых систем и плотностей выгоды дифференцируемое, а плотность выгоды при значении p_0 параметра имеет лишь конечное число критических точек.*

Доказательство. В силу предложения 3.1 для значения p_0 параметра максимальная скорость V в направлении движения вдоль цикла уровня c_0 всюду положительна. Эта скорость также положительна и для всех близких значений параметра, поскольку она непрерывна для непрерывного семейства управляемых систем. Следовательно, достаточно показать, что для любой точки (c,p) вблизи точки (c_0,p_0) область $\{x: \quad f(x,p) \geq c\}$ не содержит точек покоя.

Если это не так, то существуют последовательности точек $\{(x_i,p_i)\}$ и уровней $\{c_i\}$ такие, что $f(x_i,p_i) \geq c_i$ и $\lim\limits_{i\to\infty}(p_i,c_i) = (p_0,c_0)$. Но окружность компакт, и, следовательно, в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_{i_j}\}$, сходящаяся к точке Q окружности. Точка (Q,p_0) - точка покоя в силу непрерывности семейства систем, а значение плотности выгоды в ней не менее c_0 в силу непрерывности семейства плотностей. В силу положительности максимальной скорости $V(Q,p_0)$ минимальная скорость в этой точке должна быть либо нулевой либо отрицательной.

Далее, если уровень c_0 не является минимумом плотности $f(\cdot,p_0)$ по окружности, то движение уровня $(c_0-\epsilon)$ не является циклическим для любого достаточно малого положительного ϵ. Действительно, вблизи точки (Q,p_0) это движение должно использовать минимальную скорость, которая либо отрицательна вблизи этой точки либо вырождается в ней и удовлетворяет вблизи нее условию Липшица (в силу дифференцируемости семейства систем). В обоих случаях это движение не может пройти через точку Q : в первом случае силу отрицательности используемой скорости, а во втором оно не может войти в эту точку за конечное время, ибо функция $1/x$ имеет неинтегрируемую особенность в нуле. Следовательно, уровень c_0 не является циклическим при значении p_0 параметра, что противоречит условиям предложения. Итак, этот случай невозможен.

Если уровень c_0 - минимум плотности $f(\cdot,p_0)$ по окружности, то точка (Q,p_0) - строгий локальный минимум этой плотности, поскольку эта плотность по условию имеет лишь конечное число критических точек. Следовательно, движение уровня c_0 использует минимальную скорость вблизи точки (Q,p_0) за исключением самой этой точки. Аналогично как и выше такое движение пройти через точку Q не может, и мы снова получаем противоречие условиям предложения. Итак, и этот случай невозможен.

Таким образом, для любой точки (c, p) вблизи точки (c_0, p_0) область $\{x : \quad f(\cdot, p) \geq c\}$ не содержит точек покоя, а уровень c является циклическим для значения p параметра. $\square$

Предложение 5.2. *Если точка (c_0, p_0) доставляет цикл уровня, то мера симметрической разницы областей использования максимальной (минимальной) скорости на циклах уровня этой точки и любой точки (c, p) вблизи нее стремится к нулю при $(c, p) \to (c_0, p_0)$, если семейство пар управляемых систем и плотностей выгоды дифференцируемое, а плотность выгоды при значении p_0 параметра имеет лишь конечное число критических точек.*

Доказательство. В силу предложения 5.1 любая точка (c, p) вблизи (c_0, p_0) задает цикл уровня. Только такие точки (c, p) мы и будем здесь рассматривать.

Уровень c_0 функции $f(\cdot, p_0)$ состоит из конечного числа точек, иначе она имела бы бесконечное число критических точек в силу теоремы Ролля. Таким образом, этот уровень можно покрыть конечным числом открытых интервалов общей длиной меньшей любого наперед заданного $\epsilon > 0$. Выбирая такое покрытие и удаляя его из окружности, в остатке получим некоторый компакт K. На нем функция $|f(\cdot, p_0) - c_0|$ непрерывна и положительна. Обозначим через m ее минимум на K. В силу непрерывности семейства плотностей компакт $\{(x, p_0) : \quad x \in K\}$ имеет в пространстве переменных x, p окрестность, в которой функция $|f(x, p) - c_0|$ не меньше $2m/3$. Понятно, что любая такая окрестность содержит некоторое множество вида $K \times [p_0 - \delta, p_0 + \delta]$ при достаточно малом положительном значении δ. Для точки (x, p) этого множества имеем

$$|f(x, p) - c| \geq |f(x, p) - c_0| - |c - c_0| > m/3,$$

если $|c - c_0| < m/3$. Следовательно, для точки (c, p) вблизи точки (c_0, p_0), удовлетворяющей условиям $|c - c_0| < m/3$ и $|p - p_0| < \delta$ мера симметрической разности областей использования циклами уровня этих точек максимальной (минимальной) скорости меньше ϵ. Следовательно, эта мера стремится к нулю при $(c, p) \to (c_0, p_0)$, что требовалось показать. $\square$

Предложение 5.3. *Период цикла уровня и (средняя) выгода вдоль него непрерывны в любой точке (c_0, p_0) с циклическим уровнем c_0 при значении p_0 параметра, если семейство пар управляемых систем и плотностей выгоды дифференцируемое, а плотность выгоды при значении p_0 параметра имеет лишь конечное число критических точек.*

Доказательство. Любая точка (c, p) достаточно близкая к точке (c_0, p_0) доставляет цикл уровня в силу предложения 5.1. При этом мера симметрической разности областей использования максимальной (минимальной) скорости на циклах уровня этих точек стремиться к нулю при $(c, p) \to (c_0, p_0)$ в силу предложения 5.2. Это вместе с непрерывностью семейств максимальной (минимальной) скоростей и семейства плотностей выгоды влечет за собой утверждение предложения 5.3, что нетрудно видеть. □

Следствие 5.4. *Для дифференцируемого семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды и переходного значения p_0 параметра наибольшая средняя выгода $A_s(p_0)$, обеспечиваемая стационарными стратегиями, не меньше верхней границы $A_l(p_0)$ средних выгод, обеспечиваемых циклами уровня при $p \to p_0$, если плотность $f(., p_0)$ имеет лишь конечное число критических точек.*

Доказательство. Допустим противное, что $A_s(p_0) < A_l(p_0)$. Уровень $c_0 = A_l(p_0)$ циклический при значении p_0 параметра, что нетрудно видеть. Следовательно, в силу предложения 5.1 любая точка (c, p) вблизи точки (c_0, p_0) также доставляет цикл уровня.

Средняя выгода A вдоль цикла уровня как функция точки (c, p) непрерывна в точке (c_0, p_0) в силу предложения 5.3. В силу этой непрерывности выгода $A(c, p)$ больше $A_s(p_0)$ для любой точки (c, p) вблизи точки (c_0, p_0). Следовательно, максимальная средняя выгода при значении p_0 параметра равна c_0, и вблизи значения p_0 она всегда обеспечивается циклом уровня, ибо функция A_s непрерывна сверху. Таким образом, значение p_0 параметра не может быть переходным, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно, и $A_s(p_0) \geq A_l(p_0)$ в условиях следствия 5.4. □

Предложение 5.5. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности верно неравенство $A_s(p_0) < A_l(p_0)$, если наибольшая средняя выгода A_s по стационарным стратегиям имеет в точке p_0 одну из последних двух особенностей Таблицы 3.*

Доказательство. В случае общего положения каждая из этих двух особенностей наблюдается при появлении ортимальной стационарной стратегии (x_0, p_0) на границе области точек покоя с особенностью 2_+ этой области из списка теоремы 2.4, при этом $f_x(x_0, p_0) \neq 0$. Возьмем эту точку за начало гладких локальных координат с координатой x, возрастающей в направлении движения по циклу c-уровня при $c > f(x_0, p_0)$. Такой уровень c действительно циклический, поскольку $f_x(x_0, p_0) \neq 0$, а, значит, плотность выгоды имеет большие $A_s(p_0)$ значения.

По теореме о неявной функции уравнение $c = f(x, p)$ имеет единственное решение $x = X(c, p)$ вблизи нуля, поскольку $f_x(x_0, p_0) \neq 0$. Выбирая это решение (с точностью до знака, что сохранить направление оси выгоды) за новую координату на этой оси вблизи точки $(x_0, p_0, f(x_0, p_0))$, мы приведем функцию выгоды к виду $\pm x$ вблизи нуля, а выгоду $A_s(p_0)$ к нулю.

Особенность 2_+ соответствует обращению в нуль гладкой минимальной скорости v вместе с ее первой производной v_x, когда вторая производная v_{xx} отлична от нуля. Следовательно, в силу леммы Адамара на слое $p = p_0$ вблизи нуля эта скорость может быть представлена в виде $x^2h(x)$ с некоторой гладкой функцией $h, h(0) > 0$.

Теперь для завершения доказательства достаточно показать, что в случае общего положения для значения p_0 параметра цикл малого положительного уровня доставляет положительную среднюю выгоду, то есть большую, чем $A_s(p_0)$. Мы рассмотрим случай "$+x$" плотности выгоды вблизи нуля. Другой случай исследуется аналогично и дает такой же результат. Полезно следующее утверждение.

Lemma 5.6. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности и любой особой точки (x_0, p_0) границы крутой области все другие точки границы области покоя либо множества Максвелла из слоя $p = p_0$ являются регулярными, значение $f(x_0, p_0)$ не является критическим для плотности выгоды $f(., p_0)$, а ее уровень $f(x_0, p_0)$ не содержит точек множества Максвелла.*

Утверждения этой леммы непосредственно следуют из теорем трансверсальности, поэтому ее доказательство мы не приводим.

В силу леммы 5.6 в случае общего положения $f(x_0, p_0)$ – некритическое значение функции $f(., p_0)$. Следовательно, существует малое положительное a такое, что все значения этой функции из интервала $[0, a]$ также некритические, поскольку множество критических значений функции на окружности замкнуто.

Выберем такое a столь малым, что для $x \in [-a, a]$ плотность выгоды и минимальная скорость имеют вид x и $x^2h(x)$, соответственно. Рассмотрим теперь цикл c-уровня с $c \in (0, a)$. Период этого цикла и выгоду вдоль него разобьем на две части, соответствующие движению вне и внутри отрезка $[-a, a]$. Вторые из них имеют соответственно вид

$$\int_{-a}^{c} \frac{dx}{V(x)} + \int_{c}^{a} \frac{dx}{x^2h(x)} \quad \text{and} \quad \int_{-a}^{c} \frac{xdx}{V(x)} + \int_{c}^{a} \frac{xdx}{x^2h(x)},$$

где V - максимальная скорость вблизи нуля. Первые же, $T(a, c)$ и $P(a, c)$ дифференцируемы вблизи нуля, ибо в силу леммы 5.6 в типичном случае все точки множества Максвелла в слое $p = p_0$ регулярные, уровень $f(x_0, p_0)$ плотности выгоды $f(., p_0)$ не является критическим и не содержит точек этого множества [2], [11]. Следовательно, средняя выгода для для цикла c-уровня имеет вид

$$\left[P(a,c)+\int\limits_{-a}^{c}\frac{xdx}{V(x)}+\int\limits_{c}^{a}\frac{xdx}{x^2h(x)}\right]\left[T(a,c)+\int\limits_{-a}^{c}\frac{dx}{V(x)}+\int\limits_{c}^{a}\frac{dx}{x^2h(x)}\right]^{-1}$$

Она стремиться к нулю, а ее производная по c к $+\infty$ при $c \to 0+$, что легко увидеть после простых вычислений. Следовательно, при значении p_0 параметра максимальная средняя выгода положительна и обеспечивается циклом уровня, то есть $A_l(p_0) > A_s(p_0)$. □

Следствие 5.7. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности $A_s(p_0) = A_l(p_0)$ для любого переходного значения p_0 параметра.*

Доказательство. Для переходного значения p_0 параметра имеем $A_s(p_0) \geq A_l(p_0)$ в силу следствия 5.4. Если $A_s(p_0) > A_l(p_0)$, то выгода A_s не является непрерывной функцией вблизи точки p_0, иначе это значение параметра не является переходным. Следовательно, в случае общего положения эта выгода должна иметь в точке p_0 одну из последних двух особенностей из Таблицы 3 в силу теоремы 2.5. Но тогда $A_s(p_0) < A_l(p_0)$ в силу предложения 5.5, что противоречит нашему предположению.

Следовательно, верно утверждение следствия 5.7. □

Переходный уровень равен наибольшей средней выгоде при переходном значении параметра. Обозначим через m, $m = m(p)$, максимум по x семейства плотностей выгоды.

Предложение 5.8. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности и любого переходного значения p_0 параметра средняя выгода вдоль циклов уровня непрерывно продолжается в область $A_s(p) \leq c \leq m(p)$ с значениями параметра p вблизи p_0. Более того, продолженная выгода A удовлетворяет уравнению (2.2) в точке $(A_s(p_0), p_0)$, то есть $[c - A](A_s(p_0), p_0) = 0$.*

Доказательство. В случае общего положения выгода A_s имеет в точке p_0 одну из первых трех особенностей из Таблицы 3 в силу предложения 5.5. Следовательно, в любой достаточно малой полуокресности V этой точки выгода A_s является гладкой функцией. В силу замечания 2 в типичном случае эта выгода для значений $p \in V$ вблизи p_0 достигается в точке некоторой гладкой кривой $(X(p), p)$, которая образована либо локальными максимумами семейства плотностей выгоды, лежащими внутри области покоя (за исключением, быть может, самой точки $(X(p_0), p_0)$)) либо граничными точками этой области. Здесь X - гладкая функция.

Очевидно, что достаточно показать, что нужное непрерывное продолжение вблизи p_0 есть "над"полуокрестностью V. Выбирая новые координату $\tilde{c}$ вдоль оси выгоды, $\tilde{c} = c - A_s(p)$ при $p \in V$, и локальную координату $x, x(X(p), p) \equiv 0$, на окружности вблизи точки $(X(p_0), p_0)$, мы занулим выгоду A_s в V, а кривую $(X(p), p)$ сделаем осью координаты p.

Теперь вблизи точки $(X(p_0), p_0)$ семейство плотностей выгоды можно представить в виде $f = xh(x, p)$ с некоторой гладкой функцией h в силу леммы Адамара. Заметим теперь, что скорости, используемые вблизи этой точки движениями c-уровня с $c \geq 0$ при значении параметра p из V могут иметь на оси Op ноль не более первого порядка (в силу типа особенности области покоя в точке $(X(p_0), p_0)$). Отсюда получаем, что функция выгоды вдоль цикла уровня непрерывно продолжается в замыкание нужной области над V, а соответствующая функция периода этого цикла может иметь особенность при $c \to 0+$ как у $\ln c$ в нуле. Следовательно, и сама средняя выгода непрерывно продолжается в замыкание этой области, то есть в замыкание надграфика A_s над V.

Проведенные рассуждения проходят и для малой полуокрестности точки p_0, включая саму эту точку, когда выгода $A_s(p_0)$ достигается только в одной точке покоя, то есть в случае особенностей 1 и 3 из Таблицы 3 или особенности 2 из этой таблицы, спровоцированной особенностью самой области покоя, а не конкуренцией двух различных стационарных стратегий. Хотя теперь $\tilde{c} = c - A_s(p)$ не дифференцируема по p в точке p_0, это не меняет существа рассуждений. При конкуренции двух стратегий наши рассуждения проходят с локальными заменами координат x, p вблизи каждой из них.

Для завершения доказательства осталось установить справедливость равенства $[c - A](A_s(p_0), p_0) = 0$ для продолженной функции средней выгоды. Учитывая, что значение p_0 параметра переходное, получаем, что существует сходящаяся к p_0 последовательность значений p_i параметра такая, что максимальная средняя выгода $A(p_i)$ больше $A_s(p_i)$. Следовательно, в силу теоремы 2.1 выгода $A(p_i)$ доставляется некоторым циклом уровня c_i, а в силу теоремы 2.3 имеем $c_i = A(p_i)$ и равенство $[c - A](A(p_i), p_i) = 0$ справедливо. Но $A(p_i) \to A_s(p_0)$ при $i \to \infty$ в силу следствия 5.7. Следовательно, в силу непрерывной продолжаемости, доказанной выше, получаем в пределе справедливость равенства $[c - A](A_s(p_0), p_0) = 0$ для продолженной функции средней выгоды. $\square$

Предложение 5.9. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности и любого переходного значения p_0 параметра выгода $A_s(p_0)$ достигается только в одной точке покоя Q, являющейся либо регулярной точкой границы области покоя с $f_x(Q) \neq 0$ либо* *невырожденным локальным максимумом по x плотности выгоды, лежащим внутри этой области с $f(Q) < m(p_0)$.*

Доказательство. В предыдущем доказательстве показано, что после вычитания A_s выгода P вдоль цикла уровня доопределяется непрерывно в замыкание надграфика A_s ($=\{c \geq 0\}$), над V, а период T при этом может иметь логарифмическую особенность по c при $c \to 0+$. Следовательно, равенство из предложения 5.8 можно переписать в виде $[cT - P](A_s(p_0), p_0) = 0$. Теперь легко увидеть, что в выбранных координатах оно выполнено в точке графика выгоды A_s тогда и только тогда, когда P зануляется в ней.

Для типичного семейства пар малыми возмущениями семейства плотностей выгоды вне его локальных максимумов по x, а также вне множества Максвелла и границы области покоя семейства систем, можно убрать точки такого зануления с точек негладкости графика выгоды A_s с сохранением самой этой выгоды, что нетрудно видеть. Новые достаточно малые шевеления возмущенной пары сохраняют это, поскольку для типичной пары особенности выгоды A_s непрерывно зависят от нее в силу теоремы 2.5, а выгода P после вычитания A_s по оси выгоды также зависит непрерывно от этой пары вблизи ее особенностей 2 и 3 из Таблицы 3.

Далее, в типичном случае значения параметра с особенностями 4 или 5 выгоды A_s из Таблицы 2 не могут быть переходными в силу предложения 5.5.

Итак, в типичном случае выгода A_s является гладкой функцией вблизи переходного значения p_0 параметра. В силу замечания 2 это означает, что выгода $A_s(p_0)$ достигается только в одной точке покоя – либо невырожденном локальном максимуме плотности выгоды f внутри области покоя либо в регулярной точке границы этой области с $f_x \neq 0$. В частности, $A_s(p_0) < m(p_0)$, иначе $A_s \equiv m$ вблизи p_0, и p_0 не является переходным значением параметра, что противоречит условию.

Предложение 5.9 полностью доказано. □

Предложение 5.10. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности и любого переходного значения p_0 параметра слой $p = p_0$ не содержит двойных точек с касанием (тройных точек, точек сборки) или точек самопересечения множества Максвелла или двойных точек в уровне $A_s(p_0)$ плотности выгоды.*

Предложение 5.11. *Для типичного гладкого однопараметрического семейства пар управляемых систем и плотностей выгоды на окружности и любого переходного значения p_0 параметра плотность $f(., p_0)$ не имеет критических точек с значением $A_s(p_0)$ и имеет только одну такую точку, - оптимальную стационарную* *стратегию,- если выгода $A_s(p_0)$, достигается на границе области покоя и внутри нее, соответственно.*

Действительно, для типичного семейства пар множество Максвелла как и множество критических значений плотности выгоды устойчиво к малым возмущениям семейства. Следовательно, справедливость предложений 5.10, 5.11 можно установить с помощью малых возмущений по аналогии с доказательством предложения 5.9, поэтому соответствующие рассуждения мы здесь не приводим.

5.2. **Доказательство теоремы 2.6.** В силу предложения 5.9 для переходного значения p_0 параметра выгода A_s достигается только в одной точке покоя, скажем Q, – либо невырожденном локальном максимуме по x семейства f с $f(Q) < m(p_0)$ внутри области покоя либо регулярная точка ее границы с $f_x(Q) \neq 0$. Изучим эти два случая последовательно.

В первом случае в типичной ситуации максимальная и минимальная скорости имеют разные знаки вблизи точки Q в силу замечания 1. Следовательно, движение уровня c с $c \geq A_s(p)$ определено для значений p параметра вблизи p_0, поскольку оно использует максимальные скорости вблизи точки Q. Таким образом, запретив переключение между максимальной и минимальной скоростями вблизи этой точки, мы можем вычислить функции периода T и выгоды P во всех точках (c, p) достаточно близких к точке $R = (A_s(p_0), p_0)$. Эти функции и соответствующая средняя выгода A_l являются гладкими вблизи точки R в силу теоремы 2.2 и предложений 5.10, 5.11. Кроме того, $A_l(R) = A_s(p_0)$ по определению переходного значения параметра, $(c - P/T)(R) = 0$ в силу предложения 5.8, а также $(P/T)_c(R) = 0$ в силу оптимальности цикла уровня, доставляемого точкой R.

Следовательно, в силу теоремы о неявной функции уравнение (2.2) локально вблизи точки p_0 имеет единственное решение $c, c = C(p)$, вблизи точки R и это решение гладкое. Таким образом, вблизи p_0 максимальная средняя выгода задается максимумом из функций A_s и C. Совпадение производных этих функций в точке p_0 - дополнительное независимое условие на переходное значение параметра, поэтому его нет в случае общего положения. Следовательно, для типичного семейства пар эти производные различны, а максимальная средняя выгода имеет в точке p_0 первую особенность из Таблицы 4 точностью до R^+-эквивалентности.

Во втором случае область покоя вблизи точки Q имеет вид либо $x \leq 0$ либо $x \geq 0$ вблизи нуля в подходящих локальных гладких координат x, p вблизи этой точки с началом в ней, расслоенных над параметром и сохраняющих направление роста x. Рассмотрим первый из этих двух подслучаев. Второй анализируется аналогично.

В первом из них вблизи точки Q минимальная скорость v гладкая, отрицательная в области $x < 0$ и имеет невырожденный ноль на ее границе в силу замечания 1. Следовательно, локально вблизи нуля она приводится к виду $v(x,p) = x\gamma(p)$ с некоторой гладкой функцией γ выбором новой гладкой координаты x [5] (с сохранением формы $x \leq 0$ области покоя); $\gamma(0) > 0$, что нетрудно видеть.

Вычитая выгоду A_s из плотности выгоды для значений параметра близких к нулю, мы занулим и саму эту выгоду и семейство плотностей f на границе $x = 0$ области покоя. Теперь, в силу леммы Адамара вблизи нуля семейство f можно записать в виде $f(x,p) = xh(x,p)$ с некоторой гладкой функцией h; $h(0,0) \neq 0$, поскольку $f_x(x_0, 0) \neq 0$. Кроме того $h(0,0) > 0$, иначе нет циклов с малым положительным уровнем при близких к нулю значениях параметра, поскольку максимальная и минимальная скорости имеют различный знак в области $x < 0$ вблизи нуля.

По теореме о неявной функции уравнение $c = xh(x,p)$ имеет единственное и гладкое решение $x, x = X(c,p)$, вблизи нуля с $X(0,p) \equiv 0$ и $X_c(0,0) > 0$. Выбирая новую гладкую координату вдоль оси выгоды, совпадающую с решением X вблизи нуля, мы приведем семейство f к виду $f(x,p) = x$ вблизи нуля.

Теперь выберем положительные значения a и ϵ столь малыми, что в прямоугольнике $[-a,a]\times[-\epsilon,\epsilon]$ область покоя, семейство плотностей выгоды и минимальная скорость имеют вид $x \leq 0$, x и $x\gamma(p)$, соответственно. Функции периода цикла c-уровня с $0 < c < a$ и выгоды вдоль него для значений параметра p, $|p| < \epsilon$ имеют вид

$$T^*(c,p) + \int\limits_c^a \frac{dx}{x\gamma(p)} = T^*(c,p) + \frac{1}{\gamma(p)} \ln(\frac{a}{c}),$$

$$P^*(c,p) + \int\limits_c^a \frac{dx}{\gamma(p)} = P^*(c,p) + \frac{a-c}{\gamma(p)},$$

соответственно, где T^* и P^* - времени движения и выгода вне интервала $[-a,a]$. В силу предложения 5.11 переходный уровень $A_s(p_0)$ не является критическим значением функции $f(.,p_0)$, а в силу предложения 5.10 слой $p = p_0$ не содержит двойных точек с касанием (тройных точек, точек сборки), точек самопересечения множества Максвелла и двойных точек в уровне $A_s(p_0)$ плотности выгоды. Следовательно, функции P^* и T^* являются гладкими вблизи нуля [2], [11], и, таким образом, для выбранных значений уровня и параметра, если величины a и ϵ достаточно малы.

Теперь нам достаточно проанализировать, есть ли для близких к p_0 значений параметра циклы уровня с положительной средней выгодой. Уровень такого цикла с наибольшей выгодой должен удовлетворять уравнению (2.2) или, в нашем случае, уравнению

$$c - [P^*(c,p) + \frac{a-c}{\gamma(p)}]/[T^*(c,p) + \frac{1}{\gamma(p)}\ln(a/c)] = 0$$

Простые преобразования приводят это уравнение к виду

$$c\ln c = F(c,p), \tag{5.1}$$

с гладкой вблизи нуля функцией F, $F(c,p) = c\gamma(p)T^*(c,p) + c\ln a - \gamma(p)P(c,p)$, $F(0,p) = -\gamma(p)P(0,p)$. Используя лемму Адамара, представим эту функцию вблизи нуля в виде $cH(c,p) + pB(p)$ с некоторыми гладкими функциями H и B, $B(0,0) = -\gamma(0)P_p(0,0)$. Обращение в ноль в нуле производной P_p дает лишнее независимое условие на переходное значение параметра, и следовательно, в типичном случае $P_p(0,0) \neq 0 \neq B(0)$. Меняя, может быть, знак p, добьемся $B(0) < 0$.

Теперь легко видно, что вблизи нуля уравнение (5.1) не имеет решений при $p < 0$. При $p > 0$ его единственное решение можно найти в виде $c = \frac{p}{|\ln p|}z$, где z - функция от p. Подставляя это решение и функцию F в последней форме в (5.1), получаем уравнение

$$\frac{p}{|\ln p|}z\ln(\frac{p}{|\ln p|}z) = \frac{p}{|\ln p|}zH(\frac{p}{|\ln p|}z,p) + pB(p).$$

Сокращая его на p и преобразуя, получаем уравнение

$$z\left(-1 - \frac{\ln|\ln p|}{|\ln p|} + \frac{\ln|z|}{|\ln p|}\right) - \frac{1}{|\ln p|}zH(\frac{p}{|\ln p|}z,p) + B(p) = 0.$$

Очевидно, что значение $z(0)$ должно равняться $-B(0)$, и , таким образом, оно положительно. Вводя новые переменные r, $r = 1/|\ln p|$ и s, $s = \ln|\ln p|/|\ln p|$, получаем, что левая часть последнего уравнения – гладкая функцией от p, z, r, s, вблизи точки $(0, -B(0), 0, 0)$. Кроме того, ее производная по z в этой точке равна -1. По теореме о неявной функции это уравнение имеет вблизи этой точки единственное и гладкое решение $z = Z(p,r,s)$ с $Z(0,0,0) = -B(0)$. Для самого уравнения (5.1) это дает решение $c = \frac{p}{|\ln p|}Z\left(p, \frac{1}{|\ln p|}, \frac{|\ln p|}{\ln|\ln p|}\right)$. Заменяя координату c, $c = \tilde{c}Z(p,0,0)$, мы приведем функцию Z к виду $Z = 1 + H\left(p, \frac{1}{|\ln p|}, \frac{|\ln p|}{\ln|\ln p|}\right)$ с $H\left(0, \frac{1}{|\ln p|}, \frac{|\ln p|}{\ln|\ln p|}\right) \equiv 0$. Следовательно, максимальная средняя выгода имеет в точке p_0 вторую особенность из Таблицы 4 с точностью до R^+-эквивалентности.

Теорема 2.6 доказана.

Список литературы

[1] В.И. Арнольд - *Выпуклые оболочки и повышение производительности систем при пульсирующей загрузке*// Сиб. матем. журнал. 1987. Т. **28**. № 4. С. 27-31.

[2] В.И. Арнольд - *Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах*// Функц. анализ и его приложения. 2002. Т. **36**. С. 1-11.

[3] V.I. Arnol'd - *On a Variational Problem Connected with Phase Transitions of Means in Controllable Dynamical Systems*//in Birman, Michael Sh. (ed.) et al., Nonlinear problems in mathematical physics and related topics I. In honor of Professor O. A. Ladyzhenskaya. New York, NY: Kluwer Academic/Plenum Publishers. Int. Math. Ser., N.Y. 1, 23-34 (2002).

[4] В.И. Арнольд, А.Н.Варченко, С.М. Гусейн-Заде -*Особенности дифференцируемых отображений, Т.1*// М : Наука, 1982.

[5] V.I. Arnol'd; V.S. Afrajmovich; Yu.S. Il'yashenko; L.P. Shil'nikov - *Bifurcation theory and catastrophe theory*// Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Dynamical systems V), 5 (1994). Berlin: Springer.

[6] Л.Н. Брызгалова - *Особенности максимума функции, зависящей от параметров*// Функц. анализ и его приложения. 1977. Т.11. вып. 1. С. 59-60.

[7] Л.Н. Брызгалова - *О функциях максимума семейства функций, зависящих от параметров* // Функц. анализ и его приложения. 1978. Т.12, вып. 1. С. 66-67.

[8] C. Moreira - *Singularidades do Proveito Medio Optimo para Estrategias Estacionarias*// Tesa de Mestrado, Universidade do Porto, 2005.

[9] A.A. Davydov - *Singularities of the maximum function over the preimage*// Geometry in nonlinear control and differential inclusions, Banach Center Publications. 1995. Vol.32, C. 167-181.

[10] А.А. Давыдов - *Типичные особенности скоростей оптимальных стратегий однопараметрических циклических процессов*// Чебышевский сборник/ 2004. Т.5. Вып. 1(9). С. 87-94.

[11] А.А. Давыдов - *Особенности типичной выгоды в модели Арнольда циклических процессов*// Труды МИАН. 2005. Т.250. С. 79-94.

[12] А.А. Давыдов, В.М. Закалюкин - *Совпадение типичных особенностей решений экстремальных задач с ограничениями*// Итоги Науки и Техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 1999. Т. 64. С. 118-143.

[13] А.А. Зевин - *О некоторых особенностях оптимальных циклических траекторий*// Автоматика и телемеханика. 1980. - №3. С. 19-23.

[14] H.Th. Jongen, P. Jonker, E. Twilt - *Critical sets in parametric optimization*// Mathematical Programming. 1986. Vol. 34. P. 333-353.

[15] J.N.Mather - *Generic projections*// Ann. of Math., II. 1973. Ser. 98. P. 226-245.

[16] H. Maurer, Ch. Büskens, G. Feichtinger - *Solution techniques for periodic control problems: a case study in producting planning*// Optim. Control Appl. Meth.. 1998. Vol. **19**. P. 185-203.

[17] А.М. Цирлин - *Методы усредненной оптимизации и их приложения*// М.: Наука. Физматлит, 1997.

Владимирский гос. университет, Россия; Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия
E-mail address: davydov@vpti.vladimir.ru, davydov@iiasa.ac.at

Математический центр университета г. Порто, Португалия
E-mail address: mmmatos@fc.up.pt